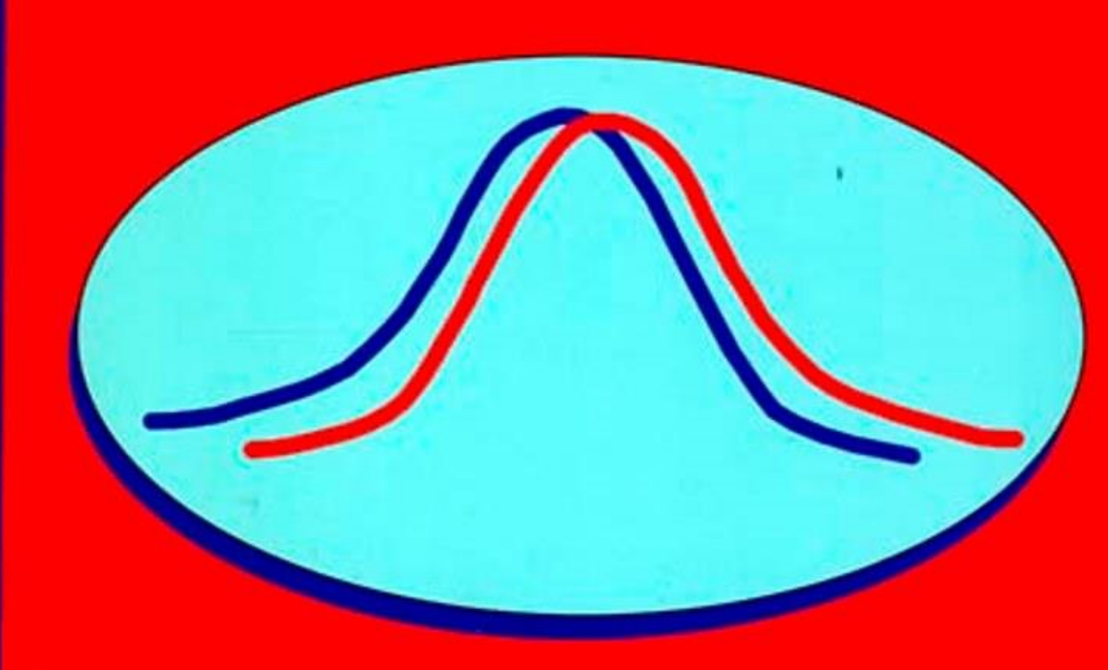
Franklin Chacín Lugo

Diseño y análisis de experimentos



EDICIONES DEL VICERRECTORADO ACADEMICO
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA



FRANKLIN CHACÍN

Ingeniero Agrónomo, MS (Estadística), PhD (Estadística) Ciencias Agrícolas, Cursos (Estadística Experimental) en Brasil, México, Costa Rica y USA. Profesor Titular de las Cátedras: Diseño de Experimentos y Técnica Experimental, Profesor actualmente de seis cursos de Postgrado en la Facultad de Agronomía, Vicepresidente de la Comisión de Desarrollo Científico del CDCH-UCV, Decano de la Facultad de Agronomía de la UCV 1996-1999/1999-2002.Ha realizado alrededor de 100 trabajos publicados en libros, monografías y revistas científicas nacionales e internacionales

Dr. Franklin Chacin

Diseño y Análisis de Experimentos I

Caracas, 2000

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
VICERRECTORADO ACADEMICO

Impreso en los Talleres de FEPUVA-UCV
Centro Comercial Los Chaguaramos
Calle Neverí, Los Chaguaramos
Piso 10, 10-8
Apartado postal 47-149
Caracas 1041 - A. Venezuela
Telfs: (02) 662.89.61 / 662.93.83

Corrección de contenido y estilo: Ing. MSe. Judith Garcia
Autoedición electrónica y diseño de portada: Pedro Camacho

1ª edición: 2000
ISBN: 980-00-1690-2
Depósito Legal: lfl 7520000011246

Impreso en Venezuela
Printed in Venezuela

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

CAPITULO 2

CAPITULO 3

CAPITULO 6

CAPITULO 7

CAPITULO 8

CAPITULO 9

CAPITULO 10

CAPITULO 11

CAPITULO 12

CAPITULO 13

ACERCA DEL AUTOR

El Doctor Franklin Chacín Lugo, graduado de Ingeniero Agrónomo, es un destacado investigador en el área de los Métodos Estadísticos aplicados a la Agronomía y en general a la Biología. Inició su preparación siendo estudiante universitario y en proceso de superación continua en esta disciplina. Ha transcurrido su vida profesional como Profesor de Postgrado de Estadística, Coordinador General de Investigación y Decano de la Facultad de Agronomía de la Universidad Central de Venezuela. Cuenta con numerosos Trabajos de Investigación como autor y como coautor en la formación de alumnos de Pregrado y Postgrado.

En 1998 publica el texto Análisis de Regresión y Superficie de Respuesta, producto de su amplia experiencia como docente investigador y asesor; y basado en su Trabajo de Ascenso a Profesor Titular, titulado "Análisis de Regresión y Superficie de Respuesta".

Esta nueva obra "Diseño y Análisis de Experimentos" es un aporte que contribuye a la mejor formación de nuestros docentes e investigadores, de estudiantes y de profesionales vinculados a la aplicación de los Estudios Estadísticos.

Margarita Cobo

Capítulo1

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN
DEFINICIONES

Ciencia: Es un creciente cuerpo de ideas organizadas en un sistema de conocimientos caracterizado como racional, sistemático, exacto, verificable y falible.

Conocimiento Científico: Es un sistema de ideas establecido provisionalmente.

Investigación Científica: Es la actividad que procura el conocimiento objetivo (hechos) o de entes ideales (abstractos e interpretados) que solo existen en la mente humana. La ciencia aplicada al mejoramiento de nuestro mundo natural y artificial, a la inversión de bienes materiales y culturales se convierte en tecnología. La ciencia como creadora del mundo de la cultura es un sistema de ideas establecidas provisionalmente (conocimiento científico) y como actividad es productora de nuevos conocimientos (investigación científica).

Ciencias Formales o Ideales: Es un conocimiento racional, sistemático y verificable, pero no es objetivo, no dan información de la realidad. La lógica, la matemática, entre otras, establecen contacto con la realidad a través del lenguaje ordinario y científico.

Ciencias Deductivas: Las Ciencias Fácticas o materiales se ocupan de los hechos usando un conocimiento racional y objetivo. Usan los procesos inductivos o deductivos. Entre ellas se encuentran las Ciencias de la Salud y de la Sociedad.

Características de las Ciencias Fácticas: Se caracterizan por lo siguiente:

- El conocimiento científico es fáctico, esto es, está basado en hechos.
- El conocimiento científico trasciende los hechos y crea nuevos hechos.
- La ciencia es analítica, esto es, se descompone en elementos.

- La investigación científica es especializada.
- El conocimiento científico es sistemático.
- El conocimiento científico es general.
- El conocimiento científico es legal.
- El conocimiento científico es predictivo.
- La ciencia es explicativa.
- La ciencia es abierta.
- La ciencia es útil.

La tecnología no es solo una aplicación del conocimiento científico a problemas prácticos, es el enfoque científico de los problemas prácticos. Todo avance tecnológico plantea problemas científicos.

Métodos de Ciencia: Son familia de métodos, cada uno de los cuales difiere de acuerdo a la materia involucrada, a la medida del fenómeno y la experimentación u observaciones repetidas. Entre los métodos de la Ciencia se incluye el estudio de la hipótesis científica, la inducción, además de teorías, leyes y métodos de explicación.

El Método Científico: Se aplica en la Ciencia no experimental, observacional y teórica así como también en la Ciencia Experimental.

Métodos de Investigación:

1.- Existen métodos lógicos o generales aplicados a todos los campos de la investigación. Entre ellos se encuentran:

a.- El Método Científico Inductivo - Deductivo. En él se siguen los siguientes pasos:

- Recolección de los hechos por observación o experimentación.
- Formulación de las hipótesis que expliquen los hechos en términos de causas y efectos.
- Deducciones de la hipótesis.

- Verificación de las deducciones por nuevas observaciones o nuevos experimentos.

b.- El Método Empírico.

c.- El Método Experimental.

d.- El Estudio de Casos.

e.- El Método de Encuesta.

f.- El Método Estadístico.

g.- El Método Histórico.

h.- El Método Sintético.

2.- Métodos Especiales o técnicos.

Hipótesis: Es la explicación lógica o supuesto sobre algunos hechos que parten de las observaciones que son de nuestro interés. La hipótesis puede ser establecida como ecuación matemática y se denomina **Modelo Matemático.** Cuando una hipótesis soporta un considerable número de pruebas que miden su respetabilidad es llamada **Teoría** y cuando sobrevive a un gran número de observaciones se convierte en **Ley.**

Predicción: es la conducción de un experimento en la imaginación; puede hacerse una predicción lógica de ciertas consecuencias de la hipótesis que bajo condiciones naturales específicas pueden ser observadas en caso de ser verdadera, pero no ha sido observada.

El método científico aplicado a la comprobación de afirmaciones informativas se reduce al método experimental. La experimentación involucra la modificación deliberada de algunos factores, es decir, la sujeción del objeto de experimentación a estímulos controlados. La astronomía no experimenta con cuerpos celestes, pero es una ciencia empírica porque aplica el método experimental.

La esencia de un experimento es que nos capacita para comparar los efectos de dos o más tratamientos sobre algunos atributos de plantas, animales u otro material experimental.

- Verificación de las deducciones por nuevas observaciones o nuevos experimentos.

b.- El Método Empírico.

c.- El Método Experimental.

d.- El Estudio de Casos.

e.- El Método de Encuesta.

f.- El Método Estadístico.

g.- El Método Histórico.

h.- El Método Sintético.

2.- Métodos Especiales o técnicos.

Hipótesis: Es la explicación lógica o supuesto sobre algunos hechos que parten de las observaciones que son de nuestro interés. La hipótesis puede ser establecida como ecuación matemática y se denomina **Modelo Matemático.** Cuando una hipótesis soporta un considerable número de pruebas que miden su respetabilidad es llamada **Teoría** y cuando sobrevive a un gran número de observaciones se convierte en **Ley**.

Predicción: es la conducción de un experimento en la imaginación; puede hacerse una predicción lógica de ciertas consecuencias de la hipótesis que bajo condiciones naturales específicas pueden ser observadas en caso de ser verdadera, pero no ha sido observada.

El método científico aplicado a la comprobación de afirmaciones informativas se reduce al método experimental. La experimentación involucra la modificación deliberada de algunos factores, es decir, la sujeción del objeto de experimentación a estímulos controlados. La astronomía no experimenta con cuerpos celestes, pero es una ciencia empírica porque aplica el método experimental.

La esencia de un experimento es que nos capacita para comparar los efectos de dos o más tratamientos sobre algunos atributos de plantas, animales u otro material experimental.

El Método Estadístico: Permite al investigador científico, planificar, analizar e interpretar los resultados de sus investigaciones, concluir y recomendar.

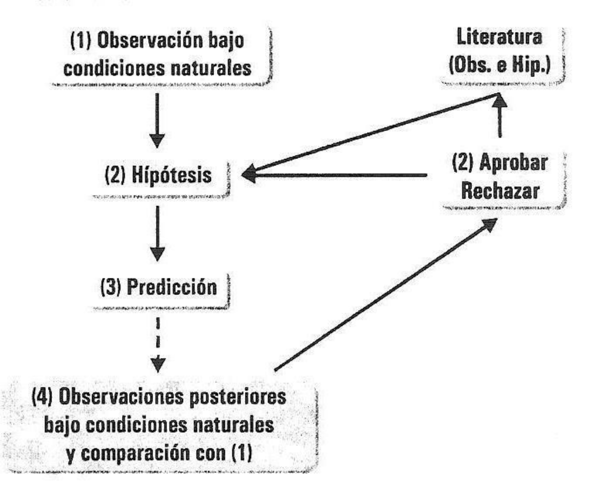
El método estadístico cuantifica las observaciones y sigue los siguientes pasos:

- Recolección y resumen de los datos.
- Diseño experimental y muestreo.
- Medición de la magnitud de la variación en datos experimentales.
- Estimación de los parámetros
- Prueba de hipótesis acerca de poblaciones.
- Relación de las variables.

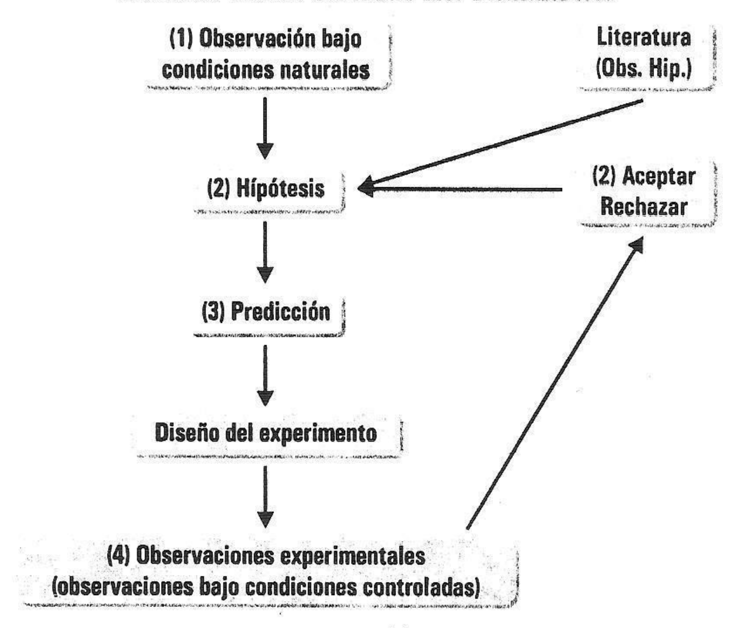
La Estadística es la ciencia que crea y desarrolla métodos para la recolección, organización, clasificación y análisis de datos a partir de muestras evaluadas a la luz de la incertidumbre.

Métodos de la Ciencia No Experimental: El esquema para los procesos de la Ciencia no experimental (ej. astronomía, ecología) es el siguiente:

METODO DE LA CIENCIA NO EXPERIMENTAL



Métodos de la Ciencia Experimental El esquema para los procesos de la Ciencia experimental (ej. física, química) es el siguiente:



Nuevos Problemas

Características de los métodos de la Ciencia: La matemática, la astronomía y la física constituyeron en el pasado campos de útil solución de problemas. En el resto de los diferentes campos se obtenían resultados provenientes de la experiencia y garantizados por su utilidad técnica. Posteriormente el método científico se aplicó y fue modificado en los campos de la química y de la biología y en la actualidad se aplica a los problemas de la sociedad o Ciencias de la Conducta Humana.

Existe la obligatoriedad en la preparación personal, para el pensamiento científico, la necesidad de adquirir el conocimiento a través del dominio de los hechos. El dominio de los hechos no se adquiere simplemente escuchando lo

que explica otra persona, sino que es la recompensa de los propios esfuerzos, se adquiere cuando a la investigación y a la experimentación se le ha dedicado mucho tiempo, siguiendo un sistema ordenado y un buen método, especialmente cultivando el hábito de distinguir entre las cosas que tienen importancia y las que no la tienen. Se podría añadir la imaginación proyectada hacia la búsqueda de causas y efectos.

En síntesis, el método científico es el producto de una metodología usada correctamente, una actitud crítica y un intenso trabajo que lleva de la incertidumbre a la probable certeza. El método científico es el procedimiento reflexivo, controlado y crítico que permite descubrir nuevos hechos o datos, relaciones o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano. Comprende la formación y definición de problemas, la formulación de hipótesis, la recopilación, sistematización y elaboración de datos, la formulación de deducciones y proposiciones generales y por último, el análisis de las conclusiones para determinar si confirman las hipótesis formuladas y encajan dentro del marco teórico del que se partió.

La investigación dentro de las ciencias fácticas o empíricas, por su vinculación a una realidad concreta referida al mundo que nos rodea, debe observar, describir, explicar, formular supuestos o predicciones sobre hechos específicos de ese mundo real y concreto, para tales supuestos la validez debe ser verificada por la experiencia, lo cual corresponde a la aplicación correcta del método científico. La investigación en el campo de la Agronomía corresponde justamente a estas ciencias bien sean naturales o sociales.

Persiguiendo la investigación fines concretos, su proceso requiere fundamentalmente del equilibrio entre la metodología y las técnicas. En ese orden de ideas, la metodología describe, analiza y valora críticamente los métodos de la investigación, por lo que el método o conjunto de ellos representa los procedimientos o caminos a seguir, mientras que las técnicas son sus auxiliares o maneras de recorrer el camino, de allí que los métodos son generales y las técnicas particulares.

El método científico se caracteriza por ser fáctico, trasciende los hechos, verifica empíricamente, confronta la realidad, es autocorrectivo y progresivo, formula en forma general y su objetivo es alcanzar la verdad fáctica. El método científico queda entonces enmarcado entre la realidad y la teoría, por lo que en todo trabajo de investigación debe manejarse los llamados *elementos básicos del método científico*: Sistema conceptual, hipótesis, definiciones, variables e indicadores.

El sistema conceptual está constituido por construcciones lógicas, producto del hombre, y permite la aprehensión de un hecho o fenómeno. La hipótesis es el nexo entre la teoría y la realidad empírica, siendo el instrumento que permite probar las relaciones entre hechos. La definición, fundamentalmente es en términos de operaciones efectivas de acuerdo con la ciencia moderna, las variables son características propias de los individuos y los indicadores surgen de la observación y son las dimensiones de las variables.

Planificación y etapas en un plan de investigación: La proyección del trabajo de investigación responde a una estructura lógica de decisiones y a una estrategia que garantice la obtención de respuestas adecuadas. La planificación corresponderá entonces a aspectos científicos y administrativos que deben responder al qué y para qué de la investigación, al cuándo y dónde, el cómo y con qué se vá a investigar un aspecto de la realidad en el campo de las ciencias naturales o sociales.

Con un conocimiento cabal de lo anteriormente expuesto se bosqueja un esquema orientador de las etapas generales que debe cubrir un plan de investigación:

1.- Formulación del problema(s) y la(s) hipótesis.

2.- Elaboración del diseño de la investigación

3.- Delimitación del trabajo de investigación.

4.- Constitución del equipo de investigación.

5.- Selección de métodos y técnicas.

6.- Organización del material de investigación.

7.- Recopilación de los datos.

8.- Elaboración de los datos.

9.- Análisis e interpretación de los datos.

10.- Redacción del informe de investigación.

En forma resumida, se pueden expresar las siguientes ideas a manera de conclusión:

- La metodología de la investigación exige el estudio de la lógica y la Teoría del Conocimiento para su cabal entendimiento.

- El trabajo de investigación es el resultado del equilibrio entre la metodología y las técnicas de investigación, lo cual garantiza una correcta ejecución y respuestas adecuadas.

- Debe diferenciar claramente entre metodología, métodos y técnicas de investigación.

- La planificación responde a aspectos científicos y administrativos por lo que puede ser conformado dentro de un conjunto de etapas generales que deben cumplirse con ciertas variantes de acuerdo a la índole del trabajo de investigación.

Capítulo 2

DISEÑO DE EXPERIMENTOS
DEFINICION

Diseñar un experimento es planificarlo de forma tal, que reúna la información que se requiere del problema planteado en la investigación. Consiste, por consiguiente, en una secuencia de pasos que garanticen que los datos que se obtienen hagan posible un análisis objetivo, el cual permitiría llegar a interpretaciones, conclusiones y recomendaciones válidas en el estudio. Éstas también dependen de la experiencia y criterio del investigador.

Es muy frecuente que se coleccionen datos que aporten poco o nada a la solución de problemas planteados. Por lo tanto, es necesario planificar los experimentos con antelación de manera que la información que se recolecte esté acorde con los objetivos, fines y alcances de la investigación y mediante la información que se genere se pueda llegar con precisión a definir la aceptación o rechazo de la hipótesis de trabajo.

La planificación del experimento se hace fundamental, con el objeto de proporcionar la mayor cantidad posible de información sobre el problema estudiado.

PRINCIPIOS BÁSICOS DEL DISEÑO EXPERIMENTAL

Los principios básicos del diseño experimental son:

Aleatorización
Replicación
Control Local

Aleatorización: Uno de los supuestos del análisis de la Varianza hace referencia a la independencia de los errores, ésto es, los errores de las observaciones deben estar distribuidos independientemente. Surge la pregunta ¿Cómo corroborar que esta suposición es verdadera?. En cierta forma no es posible, sin embargo,

el hecho de hacer una asignación al azar de los tratamientos a las unidades experimentales hace que la suposición pueda considerarse válida. La aleatorización hace válida la prueba y esto la hace apropiada para analizar los datos como si la independencia fuera un hecho. Esta referencia se hace ya que existen errores asociados con unidades experimentales adyacentes en espacio o tiempo y estos tenderán a correlacionarse y la aleatorización sólo asegura que el efecto de la asociación sobre cualquier comparación entre los tratamientos se haga tan pequeña como sea posible, sin embargo la correlación siempre existe y ésta no puede eliminarse totalmente.

En síntesis, nunca existe una independencia completa y verdadera, pero debe buscarse dicha independencia y la mejor manera de buscarla es mediante la Aleatorización. Se puede expresar que la aleatorización es un principio importante, ya que es un instrumento para eliminar tendencias, sistematización y subjetividad.

Replicacion: Se refiere a la repetición del experimento básico; por lo tanto, es la repetición de las diferentes unidades experimentales que conforman un experimento. En muchos casos la repetición puede ser de todas las unidades experimentales, de parte de ellas o de una sola unidad experimental. Las razones del porqué las replicaciones son indispensables son las siguientes:

- Mediante la replicación se puede obtener una estimación válida del error experimental y a su vez éste es necesario ya que se utiliza en la estimación de los parámetros de la población y en las pruebas de hipótesis.
- Bajo una serie de suposiciones el error experimental puede ser estimado sin tener replicaciones, sin embargo las replicaciones son convenientes ya que proporcionan, la mayor parte de las veces, una estimación más aproximada del error.
- Se obtiene una estimación más precisa del efecto medio de cualquier factor, ya que se conoce lo siguiente:

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \sigma^2 / n$$

donde σ^2 = error experimental
n = número de replicaciones

La varianza de la media es igual a la varianza por unidad entre el número de replicaciones, en consequencia, a medida que las replicaciones aumenten disminuye el efecto promedio del factor.

Control Local: Este principio se refiere a la cantidad de balances, bloqueo y agrupamiento de las unidades experimentales que se utilizan en un diseño experimental. Con la aplicación del control local se trata de disminuir el error experimental con el control de uno o varios factores de variabilidad que de no controlarse formarían parte del error experimental y por consiguiente abultarían dicho error. La función del control local es la de hacer el diseño experimental más eficiente; esto es, más sensible a las pruebas de significación o hacer más poderosos los procedimientos de prueba, debido a que se espera conseguir una disminución en la magnitud del error experimental

DEFINICIONES BÁSICAS

Tratamiento: Hace referencia a un factor o a una combinación de factores controlables. Se define como tratamiento a un conjunto particular de condiciones experimentales que deben imponerse sobre las unidades experimentales de un experimento. El término entró en la literatura debido a su uso en experimentación agrícola, pero actualmente ha perdido su connotación estrictamente agronómica y ha entrado a formar parte del lenguaje de los estadísticos. Se darán ilustraciones del uso de esta terminología en algunos campos:

En Física: Por ejemplo, en experimentos sobre bacterias los tratamientos pueden ser varias combinaciones de la cantidad de electrolitos y la temperatura de activación de las bacterias. En otro tipo de ensayo, se podría incluir otros factores tales como el tipo de material de construcción.

En Química:

En experimentos sobre rendimiento de cierto proceso químico, los tratamientos pueden ser:

Diferentes temperaturas en la cual se ejecuta el proceso.

Cantidad de reactivo usado.

Pureza de los reactivos usados.

En Agronomía:

Cantidad de mezcla de determinado fertilizante.
Cantidad de determinados nutrientes o combinaciones de cantidades de nutrientes utilizados.
Diferentes variedades o línea de cultivo.
Distintas densidades de siembra.
Profundidad de siembra.

En Zootecnia:

Diferentes raciones alimenticias dadas al animal.
Sexo y raza de los animales.
Cantidad de leche o concentrado suministrado a becerros, novillos.

En Psicología y Sociología:

Edad.
Sexo.
Altura de los individuos.
Nivel educativo, entre otros.

Unidad Experimental: Los resultados de un experimento están afectados no solamente por el efecto del tratamiento sino también por una serie de variaciones extrañas que tienden a encubrir los efectos de los tratamientos, llamado error experimental. Existen dos fuentes principales de error experimental: La variabilidad inherente al material experimental a la cual se aplican los tratamientos, y la falta de uniformidad en la conducción física del experimento; es decir, la deficiencia en poder utilizar uniformente la técnica experimental. Uno de los aspectos principales que se debe tomar en cuenta con respecto a este último, es la adecuada escogencia de la Unidad experimental.

Se define como unidad experimental a la más pequeña unidad a la cual se aplica independientemente un tratamiento. La unidad experimental representa al conjunto de material experimental al cual se le aplica un tratamiento en un solo bloque.

La unidad puede ser una parcela sembrada de maíz, ajonjolí, tomate o un grupo de cerdos, bovinos, ovinos o un lote de semillas. Es común que tales unidades experimentales produzcan diversos resultados aun cuando son sometidos al mismo tratamiento, estas diferencias contribuyen a formar los errores experimentales.

Tamaño y forma de la Unidad Experimental: El tamaño y forma de la unidad experimental son importantes, tanto desde el punto de vista de variabilidad como económico. Se ha comprobado que la variabilidad tiene una relación inversa con el tamaño de la unidad, a medida que el tamaño aumenta la variabilidad disminuye. Una medida de esa variabilidad puede ser por ejemplo el coeficiente de variación, el cual se expresa a través de la siguiente expresión:

$$C.V. = \frac{S}{\overline{X}}$$

siendo S la desviación estándar de las observaciones y $\overline{X}$ la media de las observaciones.

En el análisis de la varianza, la desviación estándar es medida en base a la raíz cuadrada del cuadrado medio del error, lo cual se expresa en la forma siguiente:

$$S^2 = CMEE \qquad \text{luego,} \qquad S = \sqrt{CMEE}$$

Si se grafica el coeficiente de Variación y el tamaño de la parcela se obtendrá la curva mostrada en la Figura 2.1 Como puede observarse en el gráfico existe una relación inversa entre el coeficiente de variación y el tamaño de la parcela.

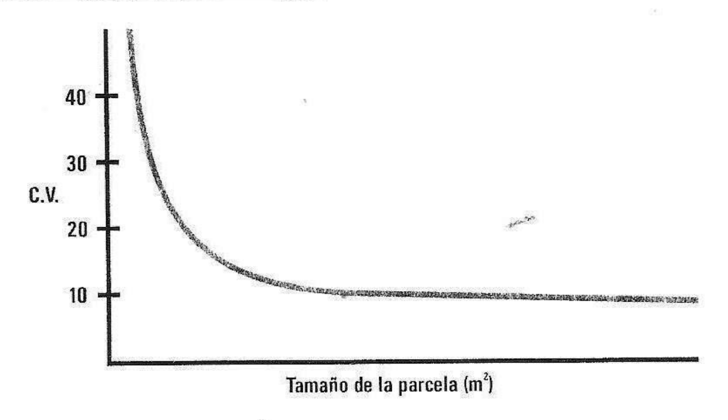


Figura 2.1 Coeficiente de Variación versus tamaño de la Parcela.

Otro aspecto importante que se debe tomar en cuenta a la hora de planificar el experimento es lo referente a la escogencia de la forma que debe tener la unidad experimental ya que de esta puede depender el aumento o disminución de la precisión en los resultados. En experimentos agrícolas vegetales se ha comprobado que las parcelas rectangulares son menos variables que las cuadradas de igual tamaño; sin embargo, se pueden planificar experimentos en los cuales las *borduras* sean importantes. Por ejemplo, en experimentos con maquinaria agrícola, la razón primordial es que las parcelas cuadradas tienen menor perímetro para igual área que las parcelas rectangulares, a esto se debe la escogencia de las parcelas cuadradas en esta área.

El aspecto económico también debe privar en la escogencia del tamaño de la parcela, muchos experimentos son llevados en áreas grandes injustificadas no solamente desde el punto de vista de variabilidad, sino de costos.

Existen una serie de métodos que nos permiten determinar tamaño y forma de la parcela óptima, tomando en cuenta la heterogeneidad, costos y número de repeticiones. Estos métodos son:

- Método de Máxima Curvatura.
- Método de Máxima Curvatura Modificado.
- Método Fairfield Smith.

- Método Koch y Rigney.
- Método de las Regresiones Múltiples.
- Método de Hatheway.
- Otros métodos nuevos.

Arreglo y número de Bloques: El bloque es una de las formas de agrupamiento de las unidades experimentales. Se ha demostrado en experimentos agrícolas que las parcelas cercanas tienden a ser más similares que las parcelas apartadas; esto se ha demostrado en los ensayos de uniformidad. Debido a esto es común en estos ensayos colocar parcelas vecinas en un solo grupo, tratando de poner las parcelas de tal manera que el grupo sea aproximadamente cuadrado, esto siempre y cuando sea posible. Con frecuencia las parcelas contiguas forman una buena base para el agrupamiento, incluso en ensayos de umbráculo o de invernadero, donde en diferentes estratos o lugares pueden existir diferencias en temperatura, luz solar, corriente de aire o accesibilidad al riego. Por otro lado es importante señalar que en muchos experimentos con plantas o, más particularmente, con animales, la localización física de las unidades experimentales a través del experimento tiene poca importancia.

En el caso de experimentación con animales es posible que un animal pueda constituir el bloque en aquellos casos en que los tratamientos puedan aplicarse sucesivamente al mismo animal, sin producir efectos residuales que oscurezcan los resultados. Uno de los agrupamientos de unidades experimentales más simple es el Diseño de Bloques al azar, ya que simultáneamente se pueden eliminar variabilidades procedentes de varias fuentes. Por ejemplo, supóngase que se planifica un experimento en maíz con tres híbridos diferentes: Arichuna, Obregón, FM6; siendo el FM6 el utilizado en la zona, esto es el considerado como testigo.

Los tratamientos pueden ubicarse consecutivamente de la manera siguiente:

REP.I

FM6	*OBREGON*	*ARICHUNA*

REP II

ARICHUNA	*FM6*	*OBREGON*

REP III

OBREGON	*FM6*	*ARICHUNA*

No siempre los tratamientos van colocados en los bloques consecutivamente, como muchos experimentadores tienden a creer. Cuando el número de tratamientos es grande puede ser conveniente tratar de buscar, en lo posible, una forma cuadrada como la siguiente:

T3	T8	T1	T6
T5	T4	T2	T7

La escogencia del tamaño del bloque puede variar dependiendo del tipo de investigación. El bloque en el campo puede ser colocado de manera tal que pueda tener cualquier número de tratamientos, sin embargo debe tomarse en cuenta que el error estándar por parcela aumenta sucesivamente con el incremento en el tamaño del bloque. Algunos autores piensan que en el sentido práctico en experimentos de campo, el número de tratamientos por bloques debe estar entre 2 y 20 máximo; las cifras mayores existen cuando hay gran uniformidad en el suelo.

Existen otros diseños como los diseños de Bloques Incompletos en los que la idea esencial es reducir el número de tratamientos por bloque de tal manera de llevarlos al tamaño adecuado.

Efecto de competencia y bordura: Cuando se planifican los experimentos, uno de los principios básicos que se toma en cuenta es el tratar de disminuir la variabilidad proveniente de algunos factores que se pueden controlar y que de no

hacerlo abultaría el error experimental y esto podría provocar que los efectos de los tratamientos no puedan ser claramente medidos. Uno de estos efectos, que debe ser tomado en cuenta, es el Efecto de Competencia y Bordura.

Se puede definir como Competencia, la interacción que se presenta por el contacto directo de dos unidades experimentales vecinas que reciben tratamientos diferentes, esta competencia puede ser por espacio, agua, luz, nutrientes, entre otros; esto surge por la vecindad entre las plantas. En el caso de animales la vecindad puede provocar diferencias de salud, temperamento, comportamiento, hábitos.

Se define como Bordura, la diferencia en comportamiento de las plantas ubicadas en los hilos externos del experimento de campo por estar en áreas no sembradas o cubiertas de malas hierbas o de otros cultivos. Para evitar estos efectos que provocan que el error experimental se abulte, generalmente se dejan hilos de Bordura. Estos hilos de bordura no se toman en cuenta en el análisis de los datos. Debido a eso se habla de parcela experimental la que incluye los hilos efectivos y los hilos de bordura y la parcela efectiva que incluye solamente los hilos efectivos.

La American Society of Agronomy refiere lo siguiente, sobre los efectos de competencia y Bordura: "En la mayoría de los experimentos de suelo, en prueba de variedades y ensayos de prácticas culturales, la producción de las parcelas puede ser modificada por la continuidad de otros tratamientos y cultivos o espacios no cultivados entre las parcelas; la modificación consiste en el aumento de algunas producciones y las bajas de otras. Se ha realizado algunos experimentos para estudiar el efecto de la Competencia y la Bordura y gran parte de ellos llegan a la conclusión de tomar en consideración estos aspectos a la hora de planificar los experimentos".

Clasificación de las observaciones

Se refiere como observaciones a las mediciones que se van a hacer en el experimento, estas observaciones pueden ser:

Observaciones Principales: Estas son las mediciones que van a servir para evaluar los tratamientos de manera de analizar los resultados, discutirlos, concluir y hacer las recomendaciones pertinentes. Todo esto con el fin de cumplir los objetivos previstos en el ensayo.

En el caso de la Experimentación Agrícola Vegetal, la medida más común es el rendimiento; sin embargo, pueden tomarse otras mediciones principales con el fin evaluar los tratamientos. Por ejemplo en ensayos de frijol pueden tomarse, además, observaciones sobre el número de vainas, longitud de las vainas, número de granos por vaina, peso de las vainas, peso de los granos, entre otros. Estas observaciones son tomadas sobre la misma unidad experimental o sobre una muestra de la unidad experimental.

Observaciones Auxiliares: Éstas se hacen principalmente con dos finalidades:

- Disminuir el error experimental.
- Encontrar una mejor interpretación de los resultados cuando los tratamientos son evaluados.

Las medidas adicionales hacen posible presuponer, por lo menos hasta cierto punto, el comportamiento de las unidades experimentales. Por ejemplo, en un experimento para medir diferentes raciones alimenticias para animales, al comienzo del experimento, los pesos iniciales serían una medida adicional muy importante, ya que el incremento en peso de un animal durante el experimento, puede estar asociada al peso inicial.

Mediante una técnica conocida con el nombre de Análisis de Covarianza, se puede estimar el grado en que las observaciones fueron influenciadas por variaciones de estas observaciones auxiliares. La respuesta promedio a cada tratamiento puede, por lo tanto, ser ajustada para disminuir el error experimental ocasionado por esa fuente de variación.

Ventajas y desventajas de los experimentos diseñados estadísticamente

Las ventajas de los experimentos diseñados estadísticamente son:

- Cuando el experimento es planificado estadísticamente es necesario una colaboración estrecha entre los estadísticos y el investigador con las consiguientes ventajas en el análisis e interpretación de resultados en las diferentes etapas.
- Se hace énfasis en las distintas alternativas de planificación y por supuesto esto permite la producción única de datos útiles para el análisis e interpretación de resultados.
- La atención debe centrarse también en las interrelaciones y la estimación y cuantificación de las fuentes de variabilidad de los resultados.
- El número de análisis y pruebas de significación pueden determinarse con certeza y a menudo se pueden reducir.
- La comparación de los efectos es más precisa debido a la tabulación y clasificación adecuada de los resultados.
- La exactitud de las conclusiones se conoce con una precisión probabilisticamente definida.

Existen algunas desventajas al planificar los experimentos estadísticamente; sin embargo, son mucho menores. Ellas son:

- Los diseños de los experimentos y su posterior análisis generalmente van acompañados de ciertos enunciados basados en el lenguaje estadístico, presentando para muchos investigadores cierta dificultad, por eso es conveniente que el estadístico traduzca a un lenguaje mas sencillo tales enunciados de manera que sea más entendible para el investigador. El estadístico no debe subestimar la importancia de la presentación de los datos en forma gráfica, pero siempre acompañado posteriormente por el procedimiento analítico.

- Existen algunos diseños muy complicados y se han criticado no solamente por lo costoso y porque requieren mucho tiempo; sin embargo, no hay que olvidar que los diseños complejos son la respuesta a objetivos complejos; por consiguiente, es prudente recordar que el mejor diseño experimental a usarse en una situación particular es aquel que siendo el más sencillo permite alcanzar los objetivos planteados.

Capítulo 3

ANÁLISIS DE VARIANZA

El análisis de Varianza, inspirado y desarrollado por R.A. Fisher y sus alumnos en el año de 1921, es un método de Estadística Inductiva válido para efectuar pruebas de significación entre dos o más series simultáneamente.

Consiste en separar la variación total de un conjunto de observaciones medidas por la suma de cuadrados de las desviaciones con respecto a la media, en componentes asociados a fuentes definidas de variación, utilizada como criterio de clasificación para las observaciones. Esto indica que en realidad, el análisis de varianza es un análisis de sumas de cuadrados.

El análisis de Varianza es usado para proveer soluciones a dos tipos de problemas fundamentales distintos. Por un lado, puede ser usado para detectar la existencia de relaciones fijas entre medias de una población y para estimar los parámetros que definen tales relaciones; y por otro lado, puede ser usado para detectar la existencia de componentes de variación y estimarlas.

SUPUESTOS BÁSICOS EN EL ANÁLISIS DE VARIANZA

Los supuestos básicos en el análisis de Varianza cuando se hacen pruebas de hipótesis son:

- Los tratamientos y los efectos ambientales son aditivos.
- Los errores experimentales son aleatorios y se distribuyen normal e independientemente en torno a una media cero y una varianza común.

El supuesto de normalidad no es necesario para estimar los componentes de la varianza. Cuando el supuesto no se hace, es necesario que los errores no estén correlacionados en vez de ser independientes. En la práctica nunca estamos seguros de que todos los supuestos se cumplan, a menudo hay razón para creer que algunos son falsos.El incumplimiento de uno o más supuestos puede afectar

tanto el nivel de significancia como el de sensibilidad de **F** o **t** a las discrepancias reales respecto a la hipótesis nula. En el caso de no normalidad, el verdadero nivel de significancia es corriente, pero no siempre mayor que el nivel aparente. Esto lleva al descarte de la hipótesis nula cuando no es verdadera con mayor frecuencia de lo que describe el nivel de probabilidad, en otras palabras, se presentan demasiadas diferencias significantes que no existen. Los experimentadores pueden pensar que están usando el nivel de significancia del 5% cuando en realidad el nivel puede ser de 7 u 8%. Se presenta pérdida de sensibilidad para las pruebas de significancia y la estimación de efectos, ya que hubiera podido combinarse una prueba más poderosa si se hubiese conocido el modelo matemático exacto. Es decir, si se conociera la verdadera distribución de los errores y la naturaleza de los efectos, su aditividad o no aditividad, entonces podría construirse una prueba capaz de detectar o estimar efectos reales.

Para la mayoría de los datos biológicos, la experiencia indica que las perturbaciones debidas a que los datos no cumplan los anteriores requisitos no son de importancia; sin embargo, hay casos excepcionales en que si lo son. En todo caso, la mayoría de los datos no cumplen exactamente con los requisitos del modelo matemático y los procedimientos de pruebas de hipótesis y de estimación de intervalos de confianza no deben considerarse exactos sino aproximados.

Se ha señalado, que los errores experimentales deben tener una varianza común; por ejemplo, en un diseño completamente aleatorizado, las componentes del error proveniente de los diferentes tratamientos, deben ser todas las estimaciones de una varianza de población común. Aquí la heterogeneidad del error puede ser resultado del comportamiento errático de la respuesta a ciertos tratamientos. En experimentos como los destinados a determinar la eficacia de diferentes insecticidas, fungicidas o herbicidas, puede incluirse un control no tratado para medir el nivel de infestación y proporcionar una base para determinar la efectividad de los tratamientos. La variación de las observaciones individuales en el control de prueba puede ser considerablemente mayor que en los tratamientos, ante todo porque el control puede tener una media más alta y así, una mayor base de variación. En estas situaciones, el término de error puede no ser homogéneo. Un remedio para esto puede ser repartir el término del error en componentes homogéneos para probar comparaciones de tratamientos específicos. Algunas veces, si las medias de uno o dos tratamientos son mucho mayores que las otras

y tienen una variación significativa mayor, entonces tales tratamientos se pueden excluir del análisis.

El que no se cumplan algunos de los demás supuestos puede dar lugar a heterogeneidad en el error experimental. Algunas sugerencias para solventar esta situación dependen de la naturaleza del no cumplimiento y pueden ser, por ejemplo, el uso de un tipo de transformación de los datos.

Es deseable probar la homogeneidad de varianza por la misma razón que se prueba homogeneidad de medias o para establecer si se cumple o no el supuesto de homogeneidad requerido para el análisis válido de la varianza de los datos. Si se descarta la hipótesis de homogeneidad de la varianza, entonces es probable que se haga un análisis de varianza sobre datos transformados.

Si se supone heterogeneidad de varianzas a partir de una prueba aplicada, se asume que las muestras se extraen de diferentes poblaciones. No se debe decir POBLACIÓN ya que , como las varianzas son desiguales, se evidencia que las muestras no provienen de una misma población muestral.

Supuesto de normalidad

La normalidad de los errores implica que el componente aleatorio de los tratamientos (error experimental) de un ensayo debe seguir una distribución simétrica cuando la distribución es normal. Las consecuencias de la no-normalidad de los errores no son demasiado graves. Únicamente una distribución muy asimétrica tendría un efecto marcado sobre el nivel de significación de la prueba *F* o sobre la eficiencia del diseño. La mejor manera de corregir la falta de normalidad es realizar una transformación que hará que los datos se distribuyan normalmente. Si una transformación simple no es suficiente habría que aplicar pruebas no paramétricas.

Se puede probar la normalidad por:

*** Prueba de Ji Cuadrado de Bondad de Ajuste:**

Esta prueba consiste en calcular un $\chi^2_{calculado}$ para luego compararlo con un $\chi^2_{tabulado}$ a un nivel de significación prefijado con el fin de establecer si se rechaza o no, la hipótesis nula. Las hipótesis que se prueban para el caso de normalidad son:

Ho : ε_{ij} n000o está distribuido NID $(0, \sigma^2)$
Ha : ε_{ij} si está distribuido NID $(0, \sigma^2)$

El estadístico de prueba es:

$$\chi^2_{calculado} = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \tag{3.1}$$

donde O_i = frecuencias observadas
E_i = frecuencias esperadas

*** Prueba de Wilk y Shapiro:**

Las hipótesis continuan siendo:

Ho: No hay normalidad
Ha : Si hay normalidad

Para la verificación de la normalidad de la variable aleatoria especificada se seguiran los siguientes pasos:

1) Se ordenan en forma creciente los datos de la variable objeto de estudio.

$$Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots \leq Y_n$$

2) Se calcula la suma de cuadrados de las desviaciones de los datos de la variable respecto a su media .

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$$

3) Si n es par, n = 2k, calcule b con la siguiente ecuación:

$$b = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i+1} (Y_{n-i+1} - Y_k)$$

4) Si n es impar, n = 2k + 1, calcule b con la siguiente ecuación:

$$b = a_n (Y_n - Y_1) + \cdots + a_{k+2} (Y_{k+2} - Y_k)$$

5) Se calcula $W = \dfrac{b^2}{S^2}$

6) Se obtiene el W-tabulado (Ver Tabla A) , con un nivel de significación de α (en la tabla se busca 1 - α)

7) Si el W-calculado > W-tabulado ; se rechaza la hipótesis nula en favor de la alternativa, con lo cual se estima que hay normalidad.

Ejemplo de aplicación de la prueba de Wilk y Shapiro

Sea el siguiente conjunto de datos compuesto de doce observaciones, en los cuales se quiere establecer si provienen de una población distribuida normalmente o no. Los datos se presentan en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Tabla de Resultados para la Prueba de Wilk - Shapiro

i	Y_i original	Y_i ordenados	a_{n-i+1}	$Y_{n-i+1}-Y_i$	$a_{n-i+1}(Y_{n-i+1}-Y_i)$
1	11,2	11,2	0,5473	13,3	7,2791
2	14,5	13,2	0,3325	9,3	3,0923
3	17,2	14,5	0,2347	6,7	1,5725
4	17,8	14,8	0,1586	5,2	0,8248
5	19,3	16,9	0,0922	2,4	0,2213
6	24,5	17,2	0,0303	0,6	0,0182
7	21,2	17,8	0	-0,6	0
8	16,9	19,3	0	-2,4	0
9	14,8	20,0	0	-5,2	0
10	20,0	21,1	0	-6,7	0
11	13,2	22,5	0	-9,3	0
12	22,5	24,5	0	-13,3	0
Total					b = 13,0082

CALCULOS

$$\overline{Y} = \left(\sum_{i=1}^{12} Y_i \right) / 12 = 17,7583$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{12} \left(Y_i - \overline{Y} \right)^2 = 171,3885$$

$$W_{calc} = \frac{b^2}{S^2} = \frac{(13,0082)^2}{171,3885} = 0,9873$$

$$W_{tab} = 0,979 \text{ con n} = 12 \text{ y } \alpha = 0,05$$

Conclusión: Como el W-calculado > W-tabulado, se descarta Ho en favor de Ha, por lo tanto se asume que existen evidencias suficientes para suponer la no violación del supuesto de normalidad.

Esta prueba puede ser llevada a cabo a través del uso de la computadora y los paquetes estadísticos más comunmente usados, entre ellos el SAS o el Statistix. En estos casos además de obtener el valor del estadistico correspondiente se tiene la probabilidad de significancia que al compararla con el α seleccionado permitirá concluir si se rechaza o no la hipótesis nula. Usualmente también se presenta un gráfico en el cual si se observa la presencia de una recta es indicativo de normalidad. Es de notar que usualmente un acercamiento a la normalidad es considerado suficiente para el cumplimiento del supuesto.

Supuesto de aditividad
Prueba de Turkey

Mediante el cumplimiento de este supuesto cualquier valor único observado puede descomponerse en componentes aditivas que representan los efectos de tratamiento así como un término especial aleatorio. Una comprobación de este supuesto requiere más de una simple observación por casilla, o bien el cálculo independiente del cuadrado medio del error a partir de experimentos previos equiparables.

Si el efecto es multiplicativo en vez de aditivo se encontraría que la suma de cuadrados de interacción aumentaría debido a la no aditividad de los efectos de tratamiento. En este caso transformando la variable se conseguirá restablecer la aditividad de los datos.

La no aditividad ocurre si los efectos principales están hechos por algún proceso como multiplicación, también ocurre cuando alguna observación se entremete accidentalmente de una población diferente de las que se están investigando, y también si la varianza heterogénea pide medias ponderadas y, finalmente si existen efectos (interacciones) además de los efectos principales y el error.

El método de prueba para la hipótesis de aditividad queda explicado por medio del siguiente ejercicio:

Los datos de la tabla 3.2 corresponden a las observaciones del efecto de 5 dosis de fertilizantes sobre la altura de plantas de pimentón al momento de transplante; en un diseño en bloques al azar.

Tabla 3.2. Datos y resultados para el análisis del supuesto de aditividad

TRAT/ BLOQ	1	2	3	4	5	$\overline{Y}_{.J}$	$\overline{Y}_{.J} - \overline{Y}_{..} = d_i$
1	16,80	14,20	9,60	15,2	16,4	14,44	-1,51
2	16,60	20,80	11,00	15,8	17,6	16,36	0,41
3	19,80	23,75	11,00	12,6	16,2	16,67	0,72
4	17,40	21,20	12,25	13,2	17,6	16,33	0,38
$\overline{Y}_{i.}$	17,65	19,98	10,96	14,2	16,95	15,95	
$\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..} = c_i$	1,7	4,0375	-4,9875	-1,75	1,0		
P_i	2,306	12,242	2,589	- 2,386	0,0804		

Los cálculos serían;

$$P_1 = 16{,}8x(-1{,}51) + 16{,}6x(0{,}41) + 19{,}8x(0{,}72) + 17{,}4x(0{,}38) = 2{,}306$$
$$P_2 = 14{,}2x(-1{,}51) + 20{,}8x(0{,}41) + 23{,}75x(0{,}72) + 21{,}2x(0{,}38) = 12{,}242$$

.

.

.

$$P_5 = 16{,}4x(-1{,}51) + 17{,}6x(0{,}41) + 16{,}2x(0{,}72) + 17{,}6x(0{,}38) = 0{,}0804$$

$$\sum d_i^2 = 3{,}111 \qquad \sum c_i^2 = 48{,}1291$$

$$P = \sum c_i P_i = 1{,}7x2{,}306 + 4{,}0375x12{,}242 - 4{,}9875x2{,}589 + 1{,}75x2{,}386 + 1{,}0x0{,}0804 = 44{,}6905$$

$$\text{SCNoAditividad} = \frac{P^2}{(\sum c_i^2)(\sum d_i^2)} = \frac{44{,}6905}{3{,}111 \times 48{,}1291} = 13{,}775$$

Por lo tanto el ANAVAR sería de la manera presentada en la tabla 3.3.

Tabla 3.3. ANAVAR que ilustra la prueba de Tukey

F. de V.	G. de L.	S.C.	C.M.	F	P
Trat	4	192,516	48,129	10,52	0,0003
Error	15	68,639	4,576		
Prueba de Tukey					
No Adit.	1	13,339	13,775	3,51	0,0818
Residuo	14	54,864	3,919		
Total	19	261,155			

El F calculado de la no-aditividad (3,51) es menor que el F tabulado, $\alpha = 0{,}05$ con 1 y 14 grados de libertad (4,6) lo que quiere decir, que no hay evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula, lo cual indica aditivividad de los efectos.

Homogeneidad de varianzas

La igualdad de varianzas, como hemos visto, en un grupo de muestras es una condición importante para varias pruebas estadísticas. Un sinónimo para esta condición es la homogeneidad de varianzas u homocedasticidad. El término homocedasticidad proviene del Griego y significa igualdad de dispersión, la condición inversa (desigualdad de las varianzas de algunas medias muestrales) es llamada heterocedasticidad.

La homocedasticidad puede alcanzarse asignando aleatoriamente los tratamientos, pero esto solamente algunas veces no basta, ya que puede haber una respuesta diferente de las unidades experimentales con distintos tratamientos. Esta

situación puede presentarse al evaluar el efecto de distintas dosis de fungicidas o herbicidas que además incluyen un control. Una posibilidad es separar los tratamientos que tienen varianzas semejantes y separarlos de los otros al hacer el análisis.

Cuando los datos se alejan de cualquiera de estos supuestos, es posible, en algunos casos, realizar un cambio de escala en la presentación de los resultados de manera de ajustarse a las condiciones impuestas para que el ANAVAR pueda aplicarse y el comportamiento de la variable estudiada se ajuste al modelo lineal. Para los tipos de desviaciones más comunes existen transformaciones.

Pruebas de Homogeneidad de Varianzas: De tiempo en tiempo nos hemos preguntado si dos o más cuadrados medios difieren significativamente. Para dos cuadrados medios se obtiene una respuesta mediante el uso de la prueba de F de dos colas, que se estudia en Estadística General, pero para el caso de más de dos medias, hay varios procedimientos y pruebas que se tratarán a continuación.

Pruebas Gráficas:

Análisis de Gráficos de residuales: Si el modelo es correcto y si se comprueban los supuestos, los residuales no deben tener estructura; en particular , ellos no deben estar correlacionados con ninguna otra variable incluida la respuesta Y_{ij} . Un simple chequeo es el gráfico de residuales contra valores fijos se Y_{ij} . Este análisis puede no revelar ningún patrón aparente. La figura 3.1 es un gráfico de residuales contra valores fijos para los datos de la Tabla 3.4.

Tabla 3.4. Fuerza de tensión en varias fibras sintéticas (lb/in)

	Observaciones					
% de algodón	1	2	3	4	5	$Y_{i.}$
15	7	7	15	11	9	49
20	12	17	12	18	18	77
25	14	18	18	19	19	88
30	19	25	22	19	23	108
35	7	10	11	15	11	54
						376 = $Y_{..}$

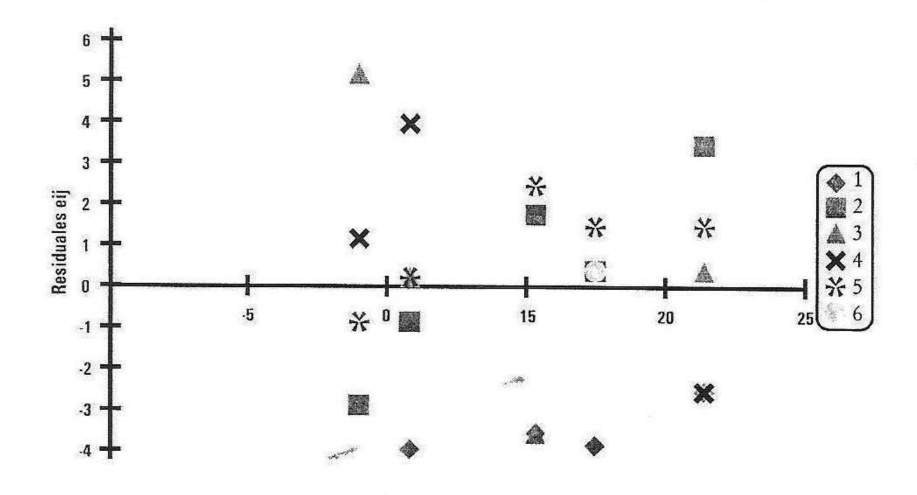


Figura 3.1. Gráfico de residuales contra valores fijos.

Algunas veces la varianza de las observaciones aumenta cuando crece la magnitud de las observaciones. Este puede ser el caso si el error es un porcentaje constante del tamaño de la observación (esto comúnmente sucede con muchas medidas de instrumentos en que el error es un porcentaje de lectura). Si es este el caso, los residuales mostrarían el corte transversal de un embudo. Las varianzas heterogéneas también se evidencian en casos en que los datos siguen una distribución distinta a la normal y/o una distribución asimétrica, en distribuciones asimétricas la varianza tiende a ser función de la media. Respuestas incorrectas al tratamiento también puede causar desigualdad en las varianzas.

Si el supuesto de homogeneidad es violado, la prueba de F se afecta solo ligeramente en el modelo balanceado de efectos fijos. Sin embargo, diseños mal balanceados o en casos en que una varianza es mucho mayor que las otras, el problema es más serio. Para el modelo de efectos aleatorios, varianzas de errores diferentes pueden afectar significativamente las inferencias sobre los componentes de varianza, aun si se utilizan en diseños bien balanceados.

Una propuesta usual al tratar con varianzas no constantes es aplicar una transformación estabilizadora de varianzas, luego se efectúa el análisis de la varianza sobre los datos transformados. Se debe notar que las conclusiones de este análisis de varianza se aplican a las poblaciones transformadas.

Se ha investigado mucho acerca de la selección de una transformación apropiada. Si las observaciones de los experimentos de prueba siguen distribuciones teóricas, se puede utilizar esta información para la selección de una transformación. Por ejemplo si las observaciones siguen la distribución Poisson, una distribución de raíz cuadrada $Y_{ij}* = \sqrt{Y_{ij}}$ ó $Y_{ij} = \sqrt{1 + Y_{ij}}$ pueden ser usadas. Si los datos siguen una distribución logarítmica, entonces la transformación $Y_{ij}* = \log Y_{ij}$ es apropiada. Para datos binomiales expresados como fracciones la transformación $Y_{ij}* = \operatorname{arcsen} Y_{ij}$ es usada. Cuando la transformación no es clara, el experimentador usualmente busca en forma empírica una transformación que iguale las varianzas haciendo caso omiso del valor de las medias. En experimentos factoriales, otra salida es seleccionar una transformación que minimice la interacción de varianzas, resultando en un experimento que sea fácil de interpretar.

Selección de una transformación estabilizadora de varianzas: Si los experimentadores supieran las relaciones que hay entre las varianzas de las observaciones y las medias, podrían usar esta información para guiarse en la selección de una transformación. Ahora se trabajará sobre este punto y se probará como es posible estimar la forma de la transformación requerida por los datos.

Sea $E(Y) = \mu$ la media de Y, y suponga que la desviación estándar de Y es proporcional a una potencia de la media de Y, tal que:

$$\sigma_Y \propto \mu_{\alpha} \tag{3.2}$$

Se quiere encontrar una transformación para Y que haga la varianza constante. Suponga que la transformación es una potencia de los originales, esto es:

$$Y^* = Y^{\lambda} \tag{3.3}$$

en la que puede ser probado que:

$$\sigma_{Y^*} \propto \mu^{\lambda+\alpha-1} \tag{3.4}$$

Claramente si hacemos $\lambda = 1 - \alpha$ entonces la varianza de los datos transformados Y^* es constante.

Varias de las transformaciones más comunes están resumidas en la Tabla 3.5. Note que $\lambda = 0$ implica la transformación logarítmica. Estas transformaciones están ordenadas según su incremento de fuerza. Por la fuerza de la transformación queremos significar la cantidad de curvatura que induce. Una transformación ligera aplicada a unos datos que abarcan un rango estrecho tiene poco efecto en el análisis, de la misma forma que una transformación fuerte aplicada en datos de rango amplio puede tener resultados dramáticos.

Tabla 3.5. Transformaciones estabilizadoras de varianzas.

Relaciones entre σ_Y y μ	α	$\lambda=1-\alpha$	Transformación	Notas
$\sigma_Y \propto$ constante	0	1	No hay	
$\sigma_Y \propto \mu^{1/2}$	1/2	1/2	Raíz cuadrada	Datos de Poisson
$\sigma_Y \propto \mu$	1	0	Logaritmo	
$\sigma_Y \propto \mu^{3/2}$	3/2	-1/2	Raíz cuadrada recíproca	
$\sigma_Y \propto \mu^{2}$	2	-1	Recíproco	

Selección empírica de α: En muchas situaciones de diseño experimental en los que hay réplicas se puede hacer una estimación empírica de α para los datos. Ya que en la combinación del tratamiento i-ésimo

$$\sigma_{Yi} \propto \mu_i^{\alpha} = \theta\ \mu_i^{\alpha} \tag{3.5}$$

donde θ es una constante de proporcionalidad, tomando logaritmos obtenemos:

$$\log \sigma_{Yi} = \log\theta + \alpha \log\mu_i \tag{3.6}$$

Por lo tanto un gráfico de $\log\sigma_{Yi}$ contra $\log\mu_i$ debería ser una recta con pendiente α. Como no se conoce σ_{Yi} y μ_i se puede sustituir estimaciones razonables de ellas y usar la pendiente de la línea ajustada como una estimación de α. Se puede usar la desviación estándar S_i y el promedio $Y_{i.}$ del tratamiento i-ésimo para estimar σ_{Yi} y μ_i.

Ejemplo del uso de transformaciones estabilizadoras de la varianza.

Un ingeniero civil está interesado en determinar si cuatro métodos diferentes para determinar el fluido de barro producen estimaciones equivalentes de descarga máxima, cuando es aplicado a un mismo canal de descarga. Cada procedimiento es usado seis veces en el mismo canal de descarga y el resultado de los datos de descarga (en pies cúbicos por segundo) aparecen en la tabla 3.6.

Tabla 3.6. Descargas máximas.

Métodos de estimación	Observaciones						$\overline{Y}_{i.}$	S_i
1	0,34	0,12	1,23	0,70	1,75	0,12	0,71	0,66
2	0,91	2,94	2,14	2,36	2,86	4,55	2,63	1,09
3	6,31	8,37	9,75	6,09	9,82	7,24	7,93	1,66
4	17,15	11,82	10,95	17,20	14,35	16,82	14,72	2,77

El análisis de varianza de los datos, totalizado en la tabla 3.7 , implica que hay una diferencia entre las medias máximas de descarga dadas por los cuatro procedimientos.

Tabla 3.7. Análisis de Varianza para los datos de descargas máximas.

Fuente de Variación	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrados medios*	*Fc*
Tratamiento	3	708,3471	236,1157	76.07
Error	20	62,0811	3,1041	
Total	23	770,4282		

El gráfico de residuales contra valores fijos que se muestra en la Figura 3.2 es problemático, ya que la forma en embudo del corte transversal implica que el supuesto de homogeneidad de varianzas no se cumple.

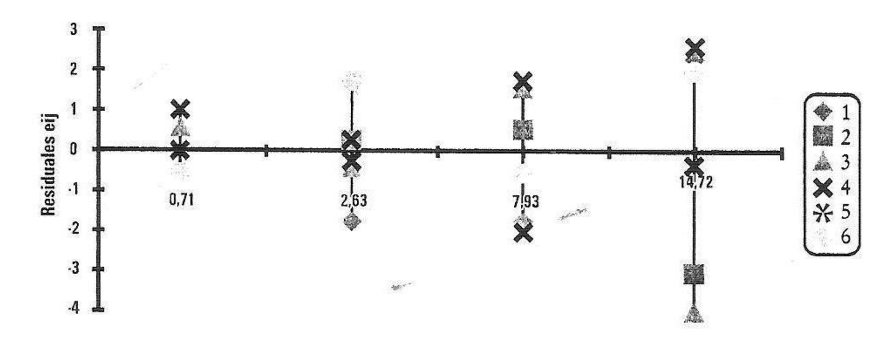


Figura 3.2. Gráfico de residuales contra valores fijos de Y para los datos de descargas máximas.

Para estudiar la posibilidad de utilizar la transformación estabilizadora de varianza sobre estos datos, se graficó Ln S_i contra Ln Y_i en la figura 3.3.

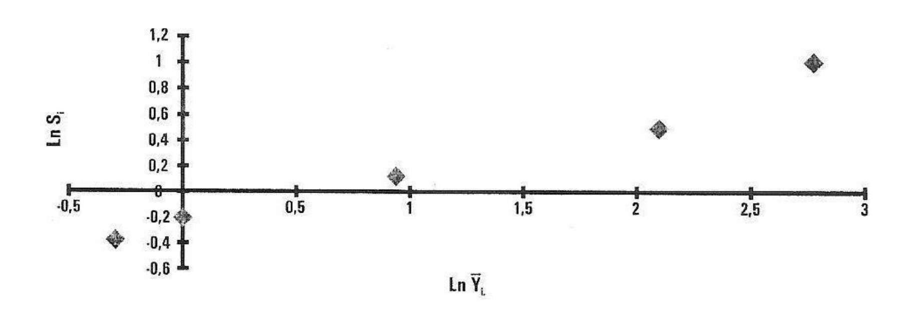


Figura 3.3. Gráfico de Ln$\overline{Y}_i$ contra Ln S_i.

La pendiente de la línea recta que pasa por estos puntos se corta para ½ y de acuerdo con la tabla 3.5, esto implica que la transformación de raíz cuadrada puede ser apropiada. El análisis de la varianza para datos transformados Y* = $\sqrt{Y}$ es presentada en la tabla 3.8 y su gráfico de residuales en la figura 3.4.

Tabla 3.8. Análisis de la varianza para los datos de descarga máxima transformada Y* = $\sqrt{Y}$

Fuente de Variación	*G. de L.*	*Suma de Cuadrados*	*Cuadrados medios*	*Fc*
Tratamiento	3	32,6842	10,8947	76,99
Error	19	2,6884	0,1415	
Total	22	35,3726		

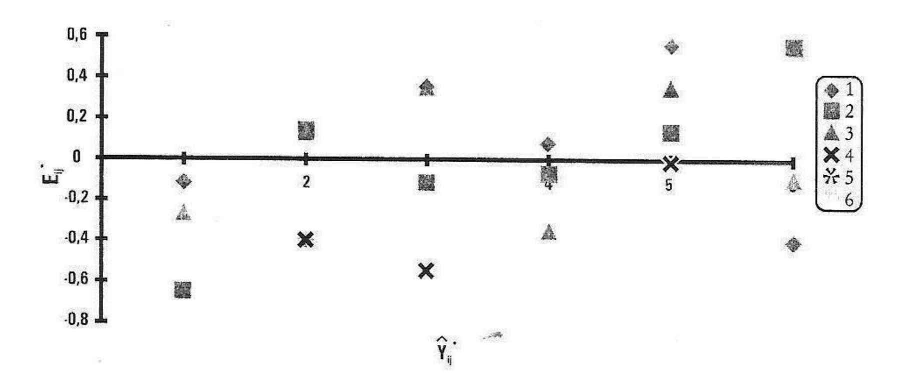


Figura 3.4 Gráfico de residuales para los datos $\hat{Y}_{ij}$ *

Estos residuales están mucho más dispersos que en la figura 3.2, por lo que se concluye que la transformación de raíz cuadrada ha sido útil. Notar que en la Tabla 3.8 se han reducido los grados de libertad en uno para tomar en cuenta el uso de los datos para estimar el parámetro α de la transformación.

PRUEBAS ANALÍTICAS DE HOMOGENEIDAD DE VARIANZAS

Además de los gráficos de residuales que se utilizan frecuentemente para diagnosticar desigualdad de varianzas, se han propuesto varias pruebas estadísticas. Estas pruebas pueden ser vistas como pruebas formales de la hipótesis:

$$Ho: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_a^2$$

Ha: al menos una de las σ_i^2 es distinta de las demás.

Prueba de Barlett: Es un procedimiento de prueba aproximado ampliamente usado. El mismo es una modificación de la prueba de razón de verosimilitud de Newman-Person. Esta prueba permite detectar si se cumple el supuesto de homogeneidad de varianza, y aunque tediosa por la cantidad de cálculos involucrados, es relativamente sencilla de aplicar y debe utilizarse siempre que se sospeche que el conjunto de datos a analizar puede estar violando este supuesto.

Para aplicar la prueba deben calcularse las varianzas dentro de cada tratamiento que no necesariamente debe ser igual. A partir de ellos se construye una tabla que ayuda a ordenar los cálculos necesarios para evaluar un valor de χ_c^2 (χ^2 calculado) que se compara con un valor tabulado. Si el valor calculado resulta menor que el tabulado para un nivel de significación predeterminado, la diferencia entre las varianzas es atribuida al azar y se declara no significativa; de lo contrario, si es mayor el χ_c^2 que el tabulado, la diferencia entre las varianzas de los distintos tratamientos es significativa y debe realizarse una transformación en los datos originales antes de proceder al ANAVAR.

El procedimiento comprende el cálculo de un estadístico cuya distribución muestral se aproxima mucho a la distribución de χ^2, con **a-1** grados de libertad, donde **a** es el número de varianzas bajo estudio. Estas varianzas provienen de muestras independientes extraídas de una población normal. El estadístico de prueba es:

$$\chi_c^2 = \text{Ln}10\,(q/c) = 2{,}3026\,(q/c) \qquad (3.7)$$

donde q y c se definen como:

$$q = (n - a) \log S_p^2 - \Sigma (n_i - 1) \log S_i^2 \quad (3.8)$$

$$c = 1 + [1/3(a-1)]\{\Sigma (n_i - 1)^{-1} - (n - a)^{-1}\} \quad (3.9)$$

$$S_p^2 = \Sigma (n_i - 1) S_i^2 / (n - a) \quad (3.10)$$

donde S_i^2 es la varianza muestral de la i-ésima población.

La cantidad **q** es grande cuando las S_i^2 difieren grandemente y es cero cuando todas ellas son iguales. Así, se puede rechazar Ho basándose en valores muy grandes de χ_c^2. En otras palabras, se rechaza Ho solamente cuando

$$\chi_c^2 > \chi_{\alpha;a-1}^2 \quad (3.11)$$

donde $\chi_{\alpha;a-1}^2$ es el percentil superior de valor α de la distribución de χ^2 con **a-1** grados de libertad.

Varios estudios han indicado que la prueba de Barlett es muy sensible al supuesto de normalidad y no debe ser aplicada cuando este supuesto está en duda, pues para usar apropiadamente esta prueba se supone que las distribuciones de base son normales. Cuando esto no ocurre, la prueba puede detectar la no normalidad en vez de la heterogeneidad de varianzas. Esta prueba es más sensible a la no normalidad que el uso de F en el análisis de varianza.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE HOMOGENEIDAD DE VARIANZAS DE BARLETT

Ejemplo 1

Dadas cinco varianzas: $S_1^2 = 11{,}2$; $S_2^2 = 9{,}8$; $S_3^2 = 4{,}3$; $S_4^2 = 6{,}8$; $S_5^2 = 8{,}2$ provenientes de muestras de tamaño 5 todas ellas, entonces:

$$S_p^2 = \left[4(11{,}2) + 4(9{,}8) + 4(4{,}3) + 4(6{,}8) + 4(8{,}2)\right] / 20 = 8{,}06$$

$$q = 20 \log 8{,}06 - 4(\log 11{,}2 + \log 9{,}8 + \log 4{,}3 + \log 6{,}9 + \log 8{,}2) = 0{,}45$$

$$c = 1 + \left[1/3(4)\right]\left[5/4 - 1/20\right] = 1{,}10$$

y el estadístico de prueba es:

$$\chi^2 = 2{,}3025(0{,}45 / 1{,}10) = 0{,}93$$

El valor tabulado corresponde a $\chi^2_{0,05;4} = 9{,}49$. Como χ^2_c es menor que $\chi^2_{0,05;4}$ entonces no podemos rechazar Ho y concluimos que las varianzas son homogéneas. Esta es la misma conclusión a que se llega por el análisis del gráfico de residuales contra valores fijos.

Ejemplo 2

Si tenemos estimaciones S_i^2 cada una con un número de grados de libertad f (igual número de observaciones fueron usadas para cada estimación) el criterio de prueba es:

$$M = 2{,}3026\, f\,(a \log \overline{S}^2 - \sum \log S_i^2) \quad \text{donde} \quad \overline{S}^2 = \sum S_i^2 / a$$

El factor 2,3026 es una constante. Bajo la hipótesis nula en que cada S_i^2 es una estimación del mismo σ^2 la cantidad M/c se distribuye normalmente con una χ^2 con $a-1$ grados de libertad donde:

$$c = 1 + (a-1) / 3af$$

En estos casos c es siempre ligeramente mayor que 1, y es necesario usarla únicamente si M está cerca de los valores críticos de χ^2 .

En la tabla 3.9 se aplica la prueba de varianza de gramos de factores absorbidos en los cuatro tipos de factores. Aquí $a = 4$ y $f = 5$. El valor de M es 1,88 lo cual claramente no es significativa con tres grados de libertad. Para ilustrar este método $\chi^2 = M/c = 1,74$ ha sido calculado.

Tabla 3.9. Cálculo de la Prueba de Barlett cuando todas las estimaciones tienen cinco grados de libertad.

Factores	S_i^2	$\log S_i^2$
1	178	2,2504
2	60	1,7781
3	98	1,9912
4	68	1,8325
Total	404	7,8522

$\overline{S}^2 = 100,9 \qquad \log\overline{S}^2 = 2,0038$

$M = 2,3026(5)\left[4(2,0038) - 7,8522\right] = 1,88$

$c = 1 + [\ (a+1)\ /\ 3\ a\ f\ ] = 1 + 5\ /\ 3\ (4)\ 5 = 1,083$

$\chi^2 = 1,88\ /\ 1,083 = 1,74$

Se concluye que no se rechaza Ho a un nivel de significancia de 0,05 y con 3 grados de libertad.

Cuando los grados de libertad difieren, como con muestras de tamaños diferentes, el cálculo de χ^2 es más largo y se realiza de la siguiente manera:

$$M = 2{,}3026\left(\sum fi\log\overline{S}^2 - \sum fi.\log S_i^2\right) \quad \text{donde } \overline{S}^2 = \sum fi.S_i^2 / \sum fi \tag{3.12}$$

$$c = 1 + \left[1/3(a-1)\right]\left[\Sigma(1/fi) - \left(1/\sum fi\right)\right] \tag{3.13}$$

$$\chi_c^2 = M/c \text{ con } a-1 \text{ grados de libertad.} \tag{3.14}$$

Ejemplo 3

En la tabla siguiente se aplica la prueba de varianzas a los pesos al nacer de cinco camadas de cochinos. Como S^2 es la varianza combinada (ponderada según los grados de libertad) necesitamos una columna para la suma de cuadrados. En el cálculo de **c** se usará también una columna con los recíprocos de los grados de libertad $(1/fi)$. Los cálculos dan valores a $\chi_c^2 = 16{,}99$ con 4 grados de libertad, probando que las varianzas difieren de camada a camada en estos datos.

Tabla 3.10. Cálculo de la Prueba de Barlett para homogeneidad de varianzas. Muestras de diferentes tamaños.

Camada (muestra)	SC $f_i S_i^2$	g.del. f_i	CM S_i^2	$\log S_i^2$	$fi \log Si^2$	$1/f_i$
1	1,18	9	0,909	-0,0414	0,3726	0,111
2	3,48	7	0,497	-0,3060	-2,1252	0,1429
3	0,68	9	0,076	-1,1192	-10,0728	0,1111
4	0,72	7	0,103	-0,9872	-6,9104	0,1429
5	0,73	5	0,146	-0,8357	-4,1785	0,2000
sumatoria	13,79	37			-23,6595	0,7080

$\overline{S}^2 = 13{,}79/37$
$(\sum fi.\log\overline{S}^2) = 37(-0{,}4286) = -15{,}8582$
$M = 2{,}3026[-15{,}8582-(-23{,}6595)] = 17{,}96$
$c = 1+[1/3(4)][0{,}7080 - 1/37] = 1{,}057$
$\chi_c^2 = M/c = 17{,}96/1{,}057 = 16{,}99$

al comparar con el valor tabulado, con 4 grados de libertad, no es significativo con un nivel de significancia de 0,01; lo cual es indicativo de homogeneidad en las varianzas.

Cuando alguno o todos los S_i^2 son menores que 1, como en el caso de estos datos, es de notar que no se altera si todos los S_i^2 y todos los $\overline{S}^2$ son multiplicados por un mismo número (digamos 10 ó 100); esto permite evitar logaritmos negativos.

Ejemplo 4

La prueba de homogeneidad de varianzas de Barlett se efectúa en los datos de un estudio sobre la herencia del tamaño de la semilla de lino; en el cual el experimentador (Myers) obtuvo la varianza de los pesos de grupos de 50 semillas provenientes de plantas individuales de padre y de la generación F1. Si se usan logaritmos naturales (con base e), no se requiere el factor 2,3026; éste sólo se emplea cuando se usan logaritmos decimales. Los datos y el cálculo del estadístico de la prueba de Barlett aparecen a continuación en la tabla 3.11.

Tabla 3.11. Prueba de Homogeneidad de Varianzas.

Clase	G .de L.	$\sum(Y-\overline{Y})^2$	S_i^2	$\log S_i^2$	(n-1)log S_i^2	1/(n-1)
Redwing	81	4.744,217	58,57	1,76768	143,18208	0,01235
Ottawa 770B	44	3.380,96	76,84	1,88559	82,96596	0,02273
F1	13	1.035,71	79,67	1,90129	24,71677	0,07692
Totales	138	9.160,84			250,86481	0,11200
			66,38	1,8204	251,44152	

$$\chi_c^2 = 2,3026\left[\sum(n_i-1)\log\overline{S}^2 - \sum(n_i-1)\log S_i^2\right] \text{ donde}$$

$$\overline{S}^2 = \sum(n_i-1)S_i^2 / \sum(n_i-1)$$

$$\chi_C^2 = 2,3026(251,44152 - 250,86481) = 1,3279 \text{ con dos grados de libertad}$$

$$\text{Factor de corrección} = 1 + [1/3(k-1)]\{\sum[1/(n_i - 1)] - 1/\sum(n_i - 1)\}$$

$$= 1 + [1/3(2)]\{0{,}11200 - 1/138\} = 1{,}01746$$

$$\chi^2_{corregido} = 1{,}3279 / 1{,}01746 = 1{,}305 \quad \text{No significante}$$

El factor de corrección deberá mejorar la aproximación de χ^2 cuando los tamaños de la muestra son pequeños. Es siempre mayor que 1 y su uso disminuye el valor bruto de χ^2 . Así generalmente calculamos el $\chi^2_{corregido}$ sólo cuando el χ^2 bruto es significante pero está cercano al valor crítico.

El valor tabulado para χ^2 con dos grados de libertad (igual al número de tratamientos menos uno) y con probabilidad de 95% es 5,99. Como el valor calculado es 1,305 (menor que el valor tabulado) es posible atribuir al azar las diferencias entre las varianzas de los tratamientos y hacer un ANAVAR con los datos originales.

Los valores independientes de χ^2 son aditivos, o sea que la distribución de una suma semejante se distribuye como χ^2 con un número de grados de libertad igual a la suma de los grados de libertad de los sumandos. Esto es válido sólo para los χ^2 sin corregir, pero no para los corregidos. Así que si se tuvieran varianzas de varios años, podría ser informativo hacer comparaciones entre y dentro de años. También si se dispone de las varianzas de varias generaciones en segregación, podemos hacer comparaciones entre padres y F1 (como en el ejemplo) entre generaciones y segregación y entre los dos grupos. El χ^2 total puede usarse, al menos como comprobación aritmética.

Cabe señalar que esta prueba requiere que se cumpla el supuesto de normalidad, si esto no se cumpliera y se hubiera realizado un muestreo de una población que no se distribuye normalmente, la prueba detecta esta falta de normalidad. El inconveniente reside en que la prueba de Barlett es más sensible que la prueba F del ANAVAR para detectar la falta de ajuste a la normalidad.

Prueba de Cochran: La prueba de Cochran ("The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total, Ann Eugen, 11:47-52(1941)) consiste en calcular $S^2_{max} / \sum S^2_i$.

Sean S^2_i para i = 1,2,...k; el conjunto de varianzas que son estimadores independientes de σ^2_i respectivamente, cada una está basada en n variables aleatorias independientes normalmente distribuidas. Sea

$$g = \max S^2_i / \sum_{i=1}^{k} S^2_i \tag{3.15}$$

el radio del mayor S^2 en el conjunto total de varianzas muestrales. La hipótesis Ho: $\sigma^2_1 = \sigma^2_2 = ... = \sigma^2_a$ es aceptada si

$$g \leq g_{\alpha} \tag{3.16}$$

donde g_{α} está dada en las tablas B y C con un nivel de significancia α igual a 0,05 ó 0,01. Las tablas tienen enteros con n, el número de observaciones por grupo y k el número de varianzas que han sido consideradas.

Prueba de Pearson y Hartley: Pearson y Hartley (1954) proponen una prueba en la que se calcula la razón S^2_{max} / S^2_{min}, en la cual se considera el cociente entre la mayor y la menor varianza de las muestras. Los autores proporcionan unas tablas especiales. Esta prueba aparece como una alternativa, puesto que la aproximación a la χ^2 es menos satisfactoria si la mayor parte de los grados de libertad $(n_i - 1)$ de cada muestra son menores que 5. Es una prueba rápida, un poco menos simple que la prueba de Barlett. En Biometrika, Tables for Statisticians, Third edition, Cambridge, New York, 1966, aparecen tablas de valores críticos para realizar la prueba.

La Fmax puede ser usada como una prueba corta de heterogeneidad de varianzas. Sean S^2_i para i = 1,2,...,k, el conjunto de varianzas que son estimadores independientes de σ^2_k, cada una basada en v grados de libertad y ordenadas en forma ascendente de magnitud. Entonces:

$$\log_e (S^2_{max} / S^2_{min}) = \log_e S^2_{max} - \log_e S^2_{min} = \text{rango}(\log_e S^2_i) \tag{3.17}$$

donde $\log_e S_i^2$ se aproxima a una distribución normal con media $\log_e \sigma^2$ y varianza 2/(v-1), puntos percentiles para S^2_{max}/S^2_{min} pueden ser calculados aproximadamente para los puntos correspondientes a los percentiles de los rangos en pruebas normales. Las tablas D y E se calculan para puntos correspondientes a los extremos de los porcentajes 5% y 1% superiores.

Una aplicación del Fmax propuesto por Pearson y Hartley para los datos de la tabla 3.9 será:

$$\text{Fmax} = (S^2_{max} / S^2_{min}) = 178/60 = 2{,}97 \qquad (3.18)$$

Cada varianza muestral tiene cinco grados de libertad, basándose en esto, se busca el valor tabulado para un nivel de significancia de 0,05 por ejemplo, y resulta ser 13,7; de donde se desprende que para este ejemplo las varianzas son homogéneas. En el caso en que el tamaño de las muestras sea diferente, se toma el menor de los grados de libertad de las varianzas empleadas en el cálculo de Fmax.

Tanto la prueba de Barlett como la de Pearson y Hartley son sensibles a la no normalidad de los datos, particularmente a la kurtosis. Con distribuciones platicurticas, la prueba da veredictos erróneos acerca de la heterogeneidad de varianzas.

Capítulo 4

DISEÑO EXPERIMENTAL COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

Introducción

Es el diseño experimental más sencillo y se origina por la asignación aleatoria de los tratamientos a un conjunto de unidades experimentales previamente establecidas. En este diseño puede probarse cualquier número de tratamientos resultando deseable, aunque no esencial, asignar el mismo número de unidades experimentales a cada tratamiento.

Es un diseño de mucha utilidad en todos los campos de la ciencia, siempre y cuando se consiga homogeneidad del material experimental y del mismo sitio donde se vaya a desarrollar el experimento. Se podrían enumerar una serie de ventajas y desventajas del diseño.

Ventajas del Diseño Experimental Completamente Aleatorizado:

- Tanto la planificación como el análisis son los más simples si se les compara con los otros diseños conocidos.

- Produce el máximo número de grados de libertad para el error experimental, lo que es muy útil en pequeños ensayos.

- Cuando existe un número desigual de replicaciones por tratamiento no es causa de complicaciones en el análisis estadístico.

- Es de fácil manejo en el campo y en el laboratorio.

Desventajas del Diseño Experimental Completamente Aleatorizado:

- Sólo puede usarse con material experimental homogéneo.

- Su utilidad es muy restringida en los experimentos de campo, debido a la heterogeneidad del suelo, que se conoce puede ser muy grande y para evitar que la misma enmascare los resultados del experimento, debe recurrirse a diseños más eficientes.

- Presenta desventajas cuando el material es heterogéneo, ya que no se puede aumentar mucho el tamaño del experimento, ya que esto motiva variaciones altas que enmascaran el efecto del experimento.

En cuanto al número de observaciones para cada tratamiento o factor se determina en base a los costos y a la potencia de la prueba.

El Modelo Lineal Aditivo

El modelo lineal aditivo para este diseño es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad (4.1)$$

para $i = 1, 2, \ldots t \qquad j = 1, 2, \ldots r$

Y_{ij} representa la j-ésima observación del i-ésimo tratamiento, por ejemplo Y_{23} representa la tercera observación del tratamiento dos.
μ es el efecto común de todo el experimento, es decir la media poblacional.
r_i representa el i-ésimo tratamiento.
ε_{ij} denota el error aleatorio presente en la j-ésima réplica del i-ésimo tratamiento.

Se considera que ε_{ij} se distribuye normal e independientemente (NID) con media cero y varianza σ^2 esta es una varianza común para todos los tratamientos.

$$\varepsilon_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2) \qquad (4.2)$$

μ es un parámetro fijo y τ_i se consideran también parámetros fijos si los tratamientos son fijos, que en ese caso se hace el supuesto siguiente:

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0 \qquad (4.3)$$

Si los "t" tratamientos son elegidos al azar, se asume que τ_i se distribuye normal e independientemente con media cero y varianza σ^2_t.

$$\tau_i \sim NID(0, \sigma^2_t.) \qquad (4.4)$$

El hecho de que los tratamientos sean fijos o aleatorios, depende de como son elegidos en un experimento dado.

El análisis de un diseño completamente aleatorizado para un solo factor consiste de un análisis de varianza con un criterio de clasificación , probándose la hipótesis nula:

$$Ho: \tau_i = 0 \qquad (4.5)$$

para toda i probada. Si la hipótesis nula es verdadera, no existe efecto de tratamiento y cada observación Y_{ij} proviene de una población con media μ y un efecto aleatorio ε_{ij}.

Análisis de Varianza

Para la revisión de la prueba F, se realiza en un análisis de varianza con una sola vía de clasificación con t grupos o tratamientos. Considérese la siguiente tabla (Tabla 4.1) en la que se muestran las observaciones.

Tabla 4.1. Ordenamiento de los datos con las medias de tratamiento para el Análisis de Varianza.

Tratamiento	Observaciones 1	2	... j	... n	Medias	
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{1j}	Y_{1n}	$\bar{Y}_{1.}$	$\mu_{1.}$
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{2j}	Y_{2n}	$\bar{Y}_{2.}$	$\mu_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...
i	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{ij}	Y_{in}	$\bar{Y}_{i.}$	$\mu_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...
t	Y_{t1}	Y_{t2}	Y_{tj}	Y_{tn}	$\bar{Y}_{t.}$	$\mu_{t.}$

Cada observación puede ser tomada de cada tratamiento, se nota que puede haber un número infinito de datos tomados de cada tratamiento. La esperanza matemática de cada tratamiento es:

$$
\begin{aligned}
E(Y_{1j}) &= \mu_1 = \mu + \tau_1 \\
E(Y_{2j}) &= \mu_2 = \mu + \tau_2 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
E(Y_{tj}) &= \mu_t = \mu + \tau_t
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

μ representa el promedio para todos los tratamientos por consiguiente $E(Y_{ij}) = \mu$

En el modelo, el efecto de tratamiento se puede indicar como $(\mu_{i.} - \mu)$, de esta forma el modelo se puede escribir de la forma siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

$$Y_{ij} = \mu + (\mu_{i.} - \mu) + (Y_{ij} - \mu_{i.})$$

$$Y_{ij} - \mu = (\mu_{i.} - \mu) + (Y_{ij} - \mu_{i.}) \tag{4.7}$$

Si las medias son desconocidas, entonces se toman muestras aleatorias de observaciones de los tratamientos y se puede hacer una estimación de las medias de los tratamientos y de la media poblacional. Si se toman n_i observaciones de los tratamientos en los que el número de observaciones no es necesariamente igual se podría representar de la manera siguiente; (Tabla 4.2).

Tabla 4.2. Muestra para el ANAVAR con un solo criterio de clasificación.

Tratamiento	Observaciones 1	2 ...	n_i	Total	Media	n_i
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{1n1}	$\sum Y_{1j}$	$\bar{Y}_{1.}$	$n_{1.}$
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{2n2}	$\sum Y_{2j}$	$\bar{Y}_{2.}$	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...
i	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{ini}	$\sum Y_{ij}$	$\bar{Y}_{i.}$	$n_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...
t	Y_{t1}	Y_{t2}	Y_{tnt}	$\sum Y_{tj}$	$\bar{Y}_{t.}$	$n_{t.}$

Aquí $Y_{i.}$ representa el total de las observaciones tomadas del tratamiento "i" y $n_{i.}$ representa el número de observaciones del mismo tratamiento y $\bar{Y}_{i.}$ es la media del referido tratamiento. $Y_{..}$ representa el total de todas las observaciones.

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} Y_{ij} \tag{4.8}$$

$$n = \sum_{i=1}^{t} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_t \tag{4.9}$$

Si Y.. es la media de las n observaciones, entonces:

$$\overline{Y}.. = \sum_{i=1}^{t} n_i \overline{Y}_{i\cdot} \; / \; n \tag{4.10}$$

Si esos estadísticos muestrales sustituyen a los correspondientes parámetros poblacionales, la ecuación que se generaría sería la siguiente:

$$Y_{ij} - \overline{Y}.. = (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}..) + (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}) \tag{4.11}$$

Esta ecuación se establece con base en las desviaciones de las observaciones con respecto a la media general y pueden dividirse estas desviaciones en dos partes, las desviaciones de la media de cada tratamiento con respecto a la media general más las desviaciones de cada observación con respecto a la media de cada tratamiento.

Si ambos lados de la ecuación anterior son elevados al cuadrado y sumados en "i" y en "j", resulta:

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (Y_{ij} - \overline{Y}..)^2 = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}..)^2 + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}..)(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})$$

Examinando el último término del lado derecho de la ecuación.

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (\overline{Y}_{i.} - Y..)(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}) = \sum_{i=1}^{t} (\overline{Y}_{i.} - Y..) \; [\sum_{j=1}^{ni} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})] \tag{4.12}$$

la parte que se encuentra entre los corchetes es igual a cero ya que representa la suma de todas las observaciones con respecto a la media dentro de cada tratamiento. Por consiguiente:

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{ni}(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{ni}(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{ni}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.})^2 \quad (4.13)$$

La ecuación anterior se puede referir como la ecuación fundamental en el análisis de la varianza y expresa la idea de que la suma de cuadrados de todas las desviaciones de las observaciones con respecto a la media general es igual a la suma de cuadrados de las desviaciones de la media de tratamiento con respecto a la media general mas las desviaciones de cada observación con respecto a la media de cada tratamiento. La manera de obtener estimadores insesgadas de la varianza poblacional sería la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{ni}(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2 = \text{SC TOTAL dividido por los grados de libertad } (n-1) \quad (4.14)$$

Si la hipótesis que se va a probar en el análisis de varianza es verdadera, entonces $\tau_i = 0$ para toda i, es decir, no hay efecto de tratamiento, esto es;

$$\mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.} = \ldots = \mu_{t.}$$

por consiguiente el modelo estaría formado solo por la media poblacional más el efecto aleatorio.

$$Y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$$

luego uno sólo de los tres términos de la ecuación anterior puede usarse como estimador insesgado de la varianza poblacional. Por ejemplo, si se divide el término del lado izquierdo de la ecuación por los grados de libertad (n-1) se produciría un estimador insesgado de la varianza poblacional.

$$(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2 \text{ dividido por } (\Sigma n_i - 1)$$

Si las varianzas dentro de los t tratamientos son estadísticamente iguales, entonces se estimarán por agrupamiento:

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (Y_{ij} - \underline{Y}_{i.})^2$$

divididos por los grados de libertad respectivos, calculados de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{t} (n_i - 1) = n - t$$

y así se obtendría la estimación de la varianza poblacional. Así también pueden hacerse estimaciones de la varianza σ^2 y entre las medias formadas de la población con $\sigma^2_y = n_i \sigma^2$ un estimador insesgado para σ^2_y es dada por $\sum_{i=1}^{t} n_i (\underline{Y}_{i.} - \underline{Y}_{..})^2 / (t-1)$ el cual se encuentra sumando el primer término de la parte derecha de la ecuación 4.13 sobre "j" y dividido por (t - 1) grados de libertad. De esta forma existen tres estimadores insesgados de σ^2 cuando la hipótesis nula es verdadera. Los tres estimadores son independientes y las sumas de cuadrados aditivas. Sin embargo se puede mostrar que si cada término de la suma de cuadrados es dividida por los respectivos grados de libertad, entonces se producirían dos distribuciones independientes que son estimadores insesgados de σ^2 cuando Ho es verdadera. Si dos de tales estimadores independientes son comparados, la razón puede demostrarse que tiene una distribución F con (t - 1) y (n - t) grados de libertad dada por :

$$F(t-1; n-t) = \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i \; (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 / (t-1)}{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{ni} (\overline{Y}_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2 / (n-t)} = \frac{CMTRAT}{CMEE} \qquad (4.15)$$

La región crítica se toma de la tabla en la que aparece la distribución de F, rechazando Ho si Fcal $\geq$ Ftab $(1 - \alpha)$ donde α es el área de $F_{1-\alpha}$. Si F es significativa indicaría que existen diferencias entre las medias de los tratamientos y por lo tanto la hipótesis nula es rechazada. Estimadores insesgados de la varianza, es decir, la suma de cuadrados entre los grados de libertad son también referidos como cuadrados medios. En la tabla 4.3 se dá el esquema de ANAVAR mostrando los grados de libertad y las sumas de cuadrados respectivos.

Tabla 4.3. ANAVAR del Diseño Completamente aleatorizado.

Fuente de Variación F. de V.	Grados de libertad G. de L.	Suma de Cuadrados S. de C.
Tratamiento	t - 1	$\sum_{i=1}^{t} n_i(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$ $= \sum_{i=1}^{t} Y_{i}^{2}/ni - \bar{Y}_{..}^{2}/n$
Error	$\sum_{i=1}^{t} (n_i - 1)$	$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$ $= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} Y_{ij}^{2} - \sum_{i=1}^{t} Y_{i.}^{2} / n_i$
Total	$\sum_{i=1}^{t} n_i - 1$	$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (Y_{ij} - Y_{..})^2$ $= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} Y_{ij}^{2} - Y_{..}^{2} / n$

Esperanza de los Cuadrados Medios:

El Modelo Lineal Aditivo es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad (4.16)$$

La suma de cuadrados de tratamiento de acuerdo a la Tabla 4.3 es:

$$SC\,TRAT = \sum_{i=1}^{t} n_i \; (\bar{Y}i. - \bar{Y}..)^2$$

del modelo (4.16)

$$\bar{Y}_{i.} = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \; / \; n = \sum_{j=1}^{ni} (\mu + \tau_i + \varepsilon_{ij})/n$$

$$\bar{Y}_{i.} = (n\,\mu \; / \, n) + (n\,\tau_i \; / \, n) + \sum_{j=1}^{ni} \varepsilon_{ij} \; / \; n$$

$$\bar{Y}_{i.} = \mu + \tau_i + \sum_{j=1}^{ni} \varepsilon_{ij} \; / \; n \qquad (4.17)$$

También:

$$\bar{Y}.. = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} Y_{ij} \; / \; nt = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (\mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}) \; / \; nt$$

$$\bar{Y}.. = (nt\,\mu \; / \, nt) + (n \sum_{i=1}^{t} \tau_i \; / \, nt) + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} \varepsilon_{ij} \; / \; nt$$

$$\bar{Y}.. = \mu + \sum_{i=1}^{t} \tau_i \; / \, t + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} \varepsilon_{ij} \; / \; nt \qquad (4.18)$$

restando de la ecuación 4.17 la ecuación 4.18.

$$(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2 = (\tau_i - \sum_{i=1}^{t} \tau_i / t)^2 + 1/n^2 (\sum_{j=1}^{ni} \varepsilon_{ij} - \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} \varepsilon_{ij} / t)^2 +$$

productos cruzados (4.19)

Suma de Cuadrados de tratamiento:

$$SC\ TRAT = \sum_{i=1}^{t} n(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^{t} (\tau_i - \sum_{i=1}^{t} \tau_i / t)^2 +$$

$$n / n^2 \sum_{i=1}^{t} (\sum_{j=1}^{ni} \varepsilon_{ij} - \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} \varepsilon_{ij} / t)^2 + n \text{ productos cruzados}$$

(4.20)

El valor esperado será:

$$E(SC\ TRAT) = n\,E[\sum_{i=1}^{t} (\tau_i - \sum_{i=1}^{t} \tau_i / t)^2] + 1/n\,E[\sum_{i=1}^{t} (\sum_{j=1}^{ni} \varepsilon_{ij} -$$

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} \varepsilon_{ij} / t)^2] \quad (4.21)$$

ya que se puede demostrar que el valor esperado de los productos cruzados es igual a cero.

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = \sum_{i=1}^{t} (\mu_{i.} - \mu) = 0$$

luego la E(SC TRAT) = $= n \sum_{i=1}^{t} \tau_i^{\,2} + (nt - n)/n \ \sigma^2_\varepsilon$

si los errores son aleatorios y $\sum_{i=1}^{t} \tau_i^{\,2}$ es una constante, la E(CM TRAT) = SC TRAT / (t-1)

así;

$$E(CM\ TRAT) = n \sum_{i=1}^{t} \tau_i^{\,2} / (t-1) + [\,n\,(t-1)/n\ (t-1)\,]\sigma^2_\varepsilon = n\sum_{i=1}^{t} \tau_i^{\,2} / (t-1) + \sigma^2_\varepsilon$$

Si los tratamientos son aleatorios y su varianza es σ^2_τ

$$E(CM\ TRAT) = n\,\sigma^2_\tau + \sigma^2_\varepsilon \qquad (4.22)$$

Cuadrado medio del Error.

$$SC\ ERROR = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

Sustrayendo las ecuaciones 4.16 y 4.17

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} = \varepsilon_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} / n$$

elevando al cuadrado y sumando

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} \left(\varepsilon_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} / n \right)^2$$

El valor esperado será:

$$E(\text{SC ERROR}) = E\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}/n)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{t} E\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}/n)$$

$$= \sum_{i=1}^{t}(n-1)\sigma^2 = t\,(n-1)\,\sigma^2_{\varepsilon} \qquad (4.23)$$

$$E\,(\text{CMEE}) = E\,[\,\text{SCEE}/t\,(n-1)] = \sigma^2_{\varepsilon} \qquad (4.24)$$

Complementando la tabla 4.3 del Análisis de Varianza, vease la siguiente Tabla 4.4.

Tabla 4.4. ANAVAR aumentado con las esperanzas de los cuadrados medios para el diseño Completamente Aleatorizado

F. de V	*G. de l.*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrados Medios*	*Modelo Fijo*	*Modelo Aleatorio*
Trat	t - 1	$\sum_{i=1}^{t} n_i (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2$	SC TRAT / t - 1	$n \sum_{i=1}^{t} \tau_i^2 / (t-1) + \sigma^2_\varepsilon$	$n\ \sigma^2_t + \sigma^2_e$
Error	t(n - 1)	$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2$	SCEE / t(n - 1)	σ^2_ε	σ^2_e
Total	nt - 1	$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} (Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2$			

Formulación del Modelo Tipo I (Efectos Fijos)

El modelo puede ser establecido como sigue:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

Y_{ij} = es el valor de la variable de respuesta en la j-ésima repetición del i-ésimo tratamiento.
μ_i = son parámetros
ε_{ij} son independientes $N(0, \sigma^2)$ $i = 1, \ldots, r$ $j = 1, \ldots n_i$

Aspectos importantes del modelo Tipo I

1) Los valores observados de Y en la j-ésima repetición del tratamiento i-ésimo es la suma de dos componentes: el término constante μ_i y el término aleatorio del error ε_{ij}.
2) Como $E(\varepsilon_{ij}) = 0$, se tiene que $E(Y_{ij}) = \mu_i$. Por lo tanto todas las observaciones para el i-ésimo tratamiento tienen la misma esperanza μ_i.
3) Como μ_i es una contante se tiene que $\sigma^2(Y_{ij}) = \sigma^2(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$ por lo tanto las observaciones tienen la misma varianza, para cualquier tratamiento.
4) Como cada ε_{ij} está distribuido normalmente Y_{ij} tiene la misma distribución. Esto es debido a que Y_{ij} es una función lineal de ε_{ij}.
5) Los errores se asumen independientes; esto es, el término del error en una salida no tiene efecto en el término de error de otro resultado. Si los errores son independientes así también son las observaciones Y_{ij}.
6) En virtud de estos aspectos en el modelo planteado se puede establecer que: Y_{ij} están independientemente distribuidos $N(\mu_i, \sigma^2)$

Nota: El modelo de análisis de varianza es un modelo lineal porque puede ser expresado matricialmente en la forma: $Y = X\beta + \varepsilon$.

Por ejemplo en el caso de dos tratamientos con dos observaciones cada uno, Y, X, β y ε se definen como sigue:

$$Y=\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{31} \\ Y_{32} \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \beta=\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{bmatrix}$$

Note la estructura simple de la matriz X y que el vector β consiste en una matriz de medias.

Modelo Tipo II (Efectos aleatorios)

El análisis de varianza para el modelo II es de la forma:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

Y_{ij} = es el valor de la variable de respuesta en la j-ésima repetición del i-ésimo tratamiento.
μ_i = son independientes $N(\mu, \sigma^2_u)$
ε_{ij} son independientes $N(0, \sigma^2)$ $i = 1, \dots, r$ $j = 1, \dots n_i$
μ_i y ε_{ij} son variables aleatorias independientes.

El modelo II es similar en apariencia a los modelos de efectos fijos. La principal distinción es que para el modelo I el factor de medias μ_i es constante, pero son variables aleatorias para el modelo II. Por lo tanto el modelo II es llamado el modelo de los efectos aleatorios.

Aspectos importantes del modelo Tipo II.

1) El valor esperado de una observación Y_{ij} es $E(Y_{ij}) = \mu$, esto se debe a que $E(Y_{ij}) = E(\mu_i) + E(\varepsilon_{ij}) = \mu + 0 = \mu$. Note que la esperanza toma promedios tanto para μ_i como para ε_{ij}.

2) La varianza de Y_{ij} es: $\sigma^2(Y_{ij}) = \sigma^2_u + \sigma^2$ esto resulta porque modelo II supone que μ_i y ε_{ij} son variables aleatorias independientes y $\sigma^2(\mu_i) = \sigma^2_u$ y $\sigma^2(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$. Debido a que la varianza de Y en este modelo es la suma de dos componentes σ^2_u y σ^2, este modelo es algunas veces llamado modelo de componentes de varianza.

3) Finalmente, los Y_{ij} están normalmente distribuidos porque son una combinación lineal de las variables μ_i y ε_{ij} los cuales son independientes y normales. Sin embargo, los Y_{ij} no son independientes debido a que un número de diferentes Y_{ij} tienen el mismo componente μ_i.

Comparación entre los modelos Tipo I y Tipo II

En el modelo I, las conclusiones que se generan son pertinentes a solo aquellos tratamientos incluidos en el estudio. En el modelo II, las conclusiones se extienden a la población de tratamientos de los cuales los tratamientos en el estudio son una muestra. La diferencia principal entre las dos situaciones es la siguiente:

El Modelo I, es relevante cuando los tratamientos son escogidos porque existe particular interés en ellos y no son considerados como una muestra de una población más grande. El Modelo II, es apropiado cuando los tratamientos constituyen una muestra de una población y el interés está en el estudio de los tratamientos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

En la siguiente tabla (Tabla 4.5) se presentan los resultados (rendimiento en Kg/parcela de 3 m^2) de un ensayo con cuatro variedades de pepino.

Tabla 4.5 Datos en el ejemplo ilustrativo de un diseño completamente aleatorizado.

Observaciones	VARIEDADES (k)			
(r)	1	2	3	4
1	4,87	2,30	6,80	1,28
2	4,60	2,25	5,70	3,88
3	1,33	5,85	4,62	5,00
4	5,58	6,16	3,80	3,25
5	5,88	8,35	2,75	1,56
6	2,81	5,93	4,93	4,25
7	4,10	1,50	4,93	4,46
8	5,63	5,85	3,80	5,53
Total	34,80	38,19	37,33	29,21

k = 4 = número de variedades.
Ellas son: 1.-Marketer; 2.-Ashley; 3.- Pixie; 4.- Poisett
r = 8 = número de observaciones por variedad
n = 32 = número total de observaciones.

1. Modelo Lineal Aditivo:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

$$i = 1, 2, \ldots, t \qquad j = 1, 2, \ldots, r$$

Y_{ij} = observación j-ésima del i-ésimo tratamiento.
μ = media general.
τ_i = efecto del i-ésimo tratamiento.
ε_{ij} = error experimental de la j-ésima observación en el i-ésimo tratamiento.

2. Supuestos del Modelo:

Modelo I

$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$

$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2)$

Modelo II

$\tau_i \sim NID(0, \sigma^2_\tau)$

$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$

3. Hipótesis:

Modelo I

Ho: $\tau_i = 0$

Ha: $\tau_i \neq 0$

Modelo II

Ho: $\sigma^2_\tau = 0$

Ha: $\sigma^2_\tau \neq 0$

4. Esquema del Análisis de Varianza:

Ver Tabla 4.6

Tabla 4.6. Esquema del Análisis de Varianza para un diseño completamente aleatorizado

F. de V	G. de l.	Suma de cuadrados	Cuadrados Medios	Esperanzas de los Cuadrados Medios Modelo Fijo M(I)	Esperanzas de los Cuadrados Medios Modelo Aleatorio M(II)
Trat	t - 1	$\sum_{i=1}^{t} Y_{i.}^2/r$ - F.C.	SC TRAT / t - 1	$r\sum_{i=1}^{t} \tau_i^2 / (t-1) + \sigma^2_\varepsilon$	$\sigma^2_\tau + \sigma^2_\varepsilon$
Error	t(r - 1)	Diferencia	SCEE / t(r - 1)	σ^2_ε	σ^2_ε
Total	r t - 1	$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} Y_{ij}^2$ - F.C.			

$$F.C. = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ni} Y_{ij}^2/rt = (Y..)^2/n$$

5. Desarrollo del Ejemplo:

Suma de Cuadrados

Suma de Cuadrados de Tratamiento:

$$SCTRAT = \frac{34{,}80^2 + 38{,}19^2 + 37{,}33^2 + 29{,}21^2}{8} - \frac{139{,}5^2}{32} = 6{,}139$$

Suma de Cuadrados Total:

$$SCTOTAL = 4{,}87^2 + 4{,}60^2 + ... + 4{,}46^2 + 5{,}53^2 - 139{,}5^2 / 32 = 92{,}569$$

Suma de Cuadrados del Error Experimental:

$$SCEE = SCTOTAL - SCTRAT = 86{,}457$$

Cuadrados Medios o Varianzas

Cuadrado Medio de Tratamiento:

CMTRAT = SCTRAT /(t - 1) = 2,0463

Cuadrado Medio del Error Experimental:

CMEE = SCEE / t (r - 1) = 3,0877

Análisis de Varianza (ANAVAR)

Fuente de Variación	*Grados de libertad*	*Suma de Cuadrados*	*Cuadrados medios*	*Fc*
Tratamiento	3	6,139	2,0463	0,662
Error	28	86,457	3,0877	
Total	31	92,596		

Prueba de Hipótesis

Fc = CMTRAT / CMEE = 0,662

$$\text{Ft} = \frac{\sum_{i=1}^{t} \tau_i^2 \,/\, (\text{t}-1) + \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}$$

Para probar la hipótesis compare el F calculado (0,662) con el F tabulado, éste se encuentra en la tabla de F con los grados de libertad del numerador (tratamiento) y los grados de libertad del denominador (error experimental) y con un nivel de significación y probabilidad de cometer el error tipo I.

Ftab (3 , 28 , 0,05) = 2.95 Ftab (3 , 28 , 0,01) = 4,57

Fcal = 0,662 es menor que cualesquiera de los dos Ftab a los distintos niveles de significación considerados.

Interpretación:

De acuerdo a los resultados se puede establecer que F no es significativa, por lo tanto, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, *Ho:* $\tau_i = 0$. Esto se puede interpretar como que no hay diferencias entre los tratamientos (variedades) estudiadas; los rendimientos promedios correspondientes a las variedades de pepino fueron estadísticamente iguales.

EJERCICIOS

Con un conjunto de datos afín a su investigación, responda las siguientes preguntas:

- Establezca el modelo lineal aditivo describiendo cada uno de los términos del modelo y los sub-índices presentes.

- Dé los supuestos del modelo.

- Establezca las hipótesis a probar.

- Escriba el cuadro de ANAVAR de acuerdo al modelo. Considere cuadrados medios esperados y los estadísticos de prueba.

- Realice el ANAVAR.

- Pruebe las hipótesis.

- Interprete los resultados.

DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO CON SUBUNIDADES EN LAS UNIDADES EXPERIMENTALES - SUBMUESTREO -

Muchas veces no basta con tomar un elemento por unidad experimental debido a que se incrementa grandemente el coeficiente de variación; por tanto, existen procedimientos en los que se determina el tamaño óptimo de la unidad experimental. Se pueden variar las combinaciones de número de réplicas y el tamaño de la unidad experimental con el fin de disminuir la variabilidad, expresada usualmente a través del coeficiente de variación.

Cuando se tienen las unidades experimentales compuestas de varios elementos, se pueden seguir tres procedimientos:

a.- Tomar un promedio
b.- Totalizar
c.- Tomar información de cada elemento individual, con el procedimiento que se describirá a continuación.

I.- Modelo Lineal aditivo

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk} \qquad (4.25)$$

$i = 1, 2, \dots, t \qquad j = 1, 2, \dots, r \qquad k = 1, 2, \dots, m$

$\varepsilon_{ij} =$ efecto del error experimental
$\delta_{ijk} =$ efecto del error de muestreo

II.- Supuestos

Modelo I

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$$

$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$

$\delta_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2_\delta)$

Modelo II

$\tau_i \sim NID(0, \sigma^2_\tau)$

$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$

$\delta_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$

III.- Hipótesis

Modelo I

Tratamiento:

Ho: $\tau_i = 0$

Ha: $\tau_i \neq 0$

Error:

Ho: $\sigma^2_\varepsilon = 0$

Ha: $\sigma^2_\varepsilon \neq 0$

Modelo II

Ho: $\sigma^2_\tau = 0$

Ha: $\sigma^2_\tau \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\varepsilon = 0$

Ha: $\sigma^2_\varepsilon \neq 0$

IV.- Prueba de F

$F_c TRAT \geq F_{tab}(\alpha, t-1, t(r-1))$ Se rechaza Ho
$F_c TRAT < F_{tab}(\alpha, t-1, t(r-1))$ No se rechaza Ho

$F_c EE \geq F_{tab}(\alpha, t(r-1), tr(m-1))$ Se rechaza Ho
$F_c EE < F_{tab}(\alpha, t(r-1), tr(m-1))$ No se rechaza Ho

Si la prueba de F para el Error Experimental es significativo, la prueba de F para tratamiento se divide entre el cuadrado medio del Error experimental; pero si no es significativo se debe hacer un pool de errores, adicionando las sumas de cuadrados y dividiendo entre las sumas de los grados de libertad de los dos errores y el FTRAT será CMTRAT / CMEE(conjunto).

Ejemplo Ilustrativo

Este ensayo fue realizado en los campos experimentales del CENIAP para evaluar el efecto de la fertilización sobre la producción de follaje en el cultivo de maíz. El área foliar se midió en base al peso seco. El diseño experimental que se utilizó en el ensayo fue el de bloques al azar, tomando muestras de dos plantas dentro de cada unidad experimental, ya que la medición del área foliar por este método es muy laboriosa para hacerlo en todas las plantas y se consideraba que dos plantas representarían una muestra apropiada de la población en cada unidad experimental. Sin embargo, para fines de ejercicio, el ensayo será analizado como un *Diseño Completamente Aleatorizado con Submuestreo.*

El modelo se considera fijo, ya que las dosis de fertilizantes utilizadas se consideran como una población y los resultados obtenidos a partir de estas dosis no pueden ser extrapolados a otros tratamientos o dosis.

I.- Modelo Lineal aditivo

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$$

$i = 1,2, \ldots, t \qquad j = 1,2, \ldots, r \qquad k = 1, 2 \ldots, m$

ε_{ij} = efecto del Error Experimental
δ_{ijk} = efecto del error de muestreo
r = número de repeticiones por tratamiento
m = número de muestras por unidad experimental

II.- Supuestos

$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$ $\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$ $\delta_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2_\delta)$

III.- Hipótesis

$Ho: \tau_i = 0$ $Ho: \sigma^2_\varepsilon = 0$

$Ha: \tau_i \neq 0$ $Ha: \sigma^2_\varepsilon \neq 0$

IV.- Análisis de los Resultados.

Vease Tabla 4.7.

Tabla 4.7 Datos en el ejemplo ilustrativo de un diseño completamente aleatorizado con submuestreo

Tratamiento	Observaciones				Total
1	6240,70	5499,90	6355,44	5634,58	
	5746,64	6336,64	6822,10	7612,56	50248,56
2	8865,02	7437,97	8171,28	8677,62	
	10263,24	9288,72	6093,54	7720,01	66517,40
3	7403,04	8537,94	7734,78	7734,78	
	7123,68	5993,94	6569,33	9236,34	60333,83
4	10458,54	9484,52	9515,70	8223,66	
	8960,72	7214,72	7577,64	7820,80	69256,30
5	8511,75	6809,40	6828,11	8511,75	
	8956,98	7865,87	8771,03	6477,66	62732,55
6	7811,90	9973,15	9248,34	9207,24	
	8503,02	5296,20	9847,44	6966,54	66853,83
7	6382,60	5825,82	9804,88	9256,13	
	10056,96	8684,05	6468,26	8125,80	65494,96
8	8855,22	8338,90	6920,71	9166,50	
	9550,62	5971,32	9035,55	4923,72	62762,54
9	6728,82	9551,65	9288,71	9998,17	
	10056,96	9166,50	7093,13	6420,00	68243,94
10	8503,02	7865,87	9026,82	7077,12	
	10166,09	7422,25	7857,00	6440,56	64358,73
11	6479,25	7071,30	5584,51	8830,88	
	7384,42	7950,54	7106,72	7623,47	58031,09
TOTAL					
	183899,65	167587,17	171661,02	171685,89	694833,73

Análisis de Varianza

F. de V	*G. de l.*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrados Medios*	*ECM*	*F*
Entre Unidad Experimental	tr - 1 = 43	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij.}^2/m - F.C.$ = 77608543			
Tratamiento	t - 1 = 10	$\sum_{i=1}^{t} Y_{i..}^2/rm - F.C.$ = 37019293	SCTRAT / t - 1 = 3701929,30	$\sigma^2_\delta + m\sigma^2_\varepsilon + mr\sum_{i=1}^{t} t_i^2/(t-1)$	CMTRAT/CMEE = 3,010
Error Experimental	t (r - 1) = 33	SC(EUE) - Sctrat = 40589250	SCEE / t(r - 1) = 1229977,27	$\sigma^2_\delta + m\sigma^2_\varepsilon$	CMEE / CMEM = 0,592
Error de Muestreo	n - tr = 44	SCTotal - Sctrat- SCEE = 91398328	SCEM / (n - tr) = 2077234,73	σ^2_δ	
Total	n - 1=87	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m} Y_{ijk}^2 - F.C$ = 169006871			

$$F.C. = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m} Y_{ijk}^2/trm = (694833{,}73)^2/88 = 5486294457$$

Suma de Cuadrados entre Unidades Experimentales:

$$SC(EUE) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij.}^2/m - F.C.$$

$$SC(EUE) = [(6240{,}70 + 5746{,}64)^2 + (5499{,}90 + 6336{,}64)^2 + \ldots + (8830{,}88 + 7623{,}47)^2]/2 \quad - F.C.$$

$$SC(EUE) = 1{,}1127806x10^{10}/2 - 5486294457 = 77608543$$

Suma de Cuadrados de Tratamiento:

$$SCTRAT = \sum_{i=1}^{t} Y_{i..}^{2} / rm - F.C$$

$$SCTRAT = \frac{(50248{,}56)^2 + (66517{,}40)^2 + \ldots + (58031{,}09)^2}{8} - 5486294457$$

$$SCTRAT = 5523313750 - 5486294457 = 37019293$$

Suma de Cuadrados del Error Experimental:

$$SCEE = SC(EUE) - SCTRAT$$

$$SCEE = 77608543 - 37019293 = 40589250$$

Suma de Cuadrados del Total:

$$SCTOTAL = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} Y_{ijk}^{2} - F.C.$$

$$SCTOTAL = 5655301328 - 5486294457 = 169006871$$

Suma de Cuadrados del Error de Muestreo:

$$SCEM = SCTOTAL - SCTRAT - SCEE$$

$$SCEM = 169006871 - 37019293 - 40589250 = 91398328$$

Prueba de Hipótesis

Para Tratamiento:

Fcal = 3,010 Ftab = 2,12 (10 gl, 33 gl, 0,05)

Ftab = 2,49 (10 gl, 33 gl, 0,01)

Para el Error Experimental:

Fcal = 0,592 Ftab = 1,72 (33 gl, 44 gl, 0,05)

Ftab = 2,15 (33 gl, 44 gl, 0,01)

Coeficiente de Variación

$$CV(M) = \frac{\sqrt{CMEM}}{\bar{Y}_{general}} x100 = \frac{\sqrt{2077234,73}}{7895,84} x100 = 18\%$$

$$CV(EUE) = \frac{\sqrt{CMEE}}{\bar{\bar{Y}}_{UE}} x100 = \frac{\sqrt{1229977,27}}{15791,68} x100 = 7\%$$

Interpretación de Resultados

La prueba de F para tratamiento muestra un valor altamente significativo por lo que se rechaza la hipótesis nula *(Ho:* $\tau_i = 0$) en favor de la hipótesis alterna *(Ho:* $\tau_i \neq 0$) lo que indica que por lo menos un tratamiento tuvo efectos diferentes a los demás. En este sentido también se puede observar que el C.V. entre unidades experimentales fue relativamente bajo, permitiendo confiabilidad en los resultados obtenidos. Por ende, se puede afirmar que al menos una de las dosis de fertilizantes utilizadas provocó una producción promedio de follaje en la planta de maíz diferente a las otras dosis.

Por otra parte la prueba de F para el error experimental arroja valores no significativos y menores que uno. Por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula *(Ho:* $\sigma^2_\varepsilon = 0$) y se concluye que la varianza del error de muestreo y la varianza del Error Experimental son estadísticamente iguales y están siendo estimadas por σ^2_δ. Esto indica poca heterogeneidad en el muestreo y complementado con el hecho de que el coeficiente de variación es relativamente bajo, afirma aun más la conclusión de que el muestreo fue adecuado.

Capítulo 5

DISEÑO EXPERIMENTAL EN BLOQUES ALEATORIOS O BLOQUES AL AZAR

Introducción

Los bloques al azar o bloques aleatorios constituyen el diseño de mayor importancia en la planificación experimental estadística. La utilización de este diseño conduce a utilizar los tres principios fundamentales del diseño estadístico: a) Aleatorización , b) Replicaciones, c) Control Local.

La aleatorización se cumple al asignar los tratamientos a las unidades experimentales de cada bloque, de tal manera que todos los tratamientos estén representados en cada uno de ellos; esto en sí constituye una restricción en la aleatorización en comparación con el diseño completamente aleatorizado.

Las replicaciones se cumplen ya que cada bloque representa una repetición de cada tratamiento y el Control Local con el bloqueo o agrupamiento de las unidades experimentales en los bloques de tal manera de extraer del error experimental la variabilidad de cualquier factor medida a través del bloqueo.

Para que el experimento sea eficiente, deberá cada bloqueo ser lo mas uniforme, ya que el error se mide con base en la variabilidad aleatoria dentro del bloque.

El diseño permite realizar un análisis de varianza para datos que pueden ser clasificados bajo dos criterios. La disposición en bloques al azar es recomendable en la práctica, cuando se hacen comparaciones en las que el número de tratamientos van desde 4 hasta 24. Puede ser muy útil en ensayos de campo, umbráculos, ganadería, economía, entre otros.

Si se utiliza cuando el número de tratamientos es menor que 4, el número de repeticiones tendría que ser grande, generalmente mayor que 6, para poder tener suficientes grados de libertad para el error y poder estimarlo eficientemente. Es de recordar que en la práctica, es conveniente que los grados de libertad del

error sean mayores de 10, aunque esto depende de la homogeneidad del material experimental.

Utilizar el diseño cuando hay más de 24 tratamientos es hasta cierto punto ineficiente y poco práctico, ya que puede existir heterogeneidad dentro de las repeticiones, es decir, entre las unidades experimentales, que hace aumentar grandemente el error.

Disposición Experimental

Es condición principal que todos los tratamientos formen bloques aleatorios; esto es, cada tratamiento debe estar representado una sola vez y aleatorizado en cada bloque. En cuanto al número de repeticiones es conveniente que oscile entre 4 y 12 dependiendo de:

- La relación directa entre precisión y número de repeticiones: si se necesita más precisión se aumenta el número de repeticiones.

- La heterogeneidad: entre mayor la heterogeneidad del material experimental mayor el número de repeticiones.

- Número de tratamientos: entre mayor el número de tratamientos menor puede ser el número de bloques.

- Tamaño de la unidad experimental: entre mayor sea el tamaño de la unidad experimental menor puede ser el número de repeticiones.

Por consiguiente es conveniente encontrar la mejor relación entre estos factores.

Ventajas y desventajas del diseño experimental en bloques al azar

Es el diseño más utilizado en la investigación agrícola ya que permite controlar un factor de variabilidad, además de ser un diseño muy flexible desde el punto de vista de su análisis así como cuando hay parcelas perdidas o covariables para ajustes en el análisis de varianza.

En cuanto a sus desventajas principales, se puede mencionar que cuando las condiciones son homogéneas los grados de libertad para el error experimental son menores que los del completamente aleatorizado y por consiguiente es menos precisa la estimación del Error Experimental. Otra desventaja es que cuando se usa un gran número de tratamientos las variabilidades dentro del bloque se pueden elevar de tal manera que el diseño se hace poco eficiente.

Modelo Lineal en el Diseño en Bloques al azar

El modelo de componentes de variación que describe la respuesta obtenida a través de un diseño en Bloques al azar es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad (5.1)$$

$$\text{para } i = 1, 2, \ldots t \quad j = 1, 2, \ldots r$$

Y_{ij} representa la j-ésima observación del i-ésimo tratamiento.
μ es el efecto común de todo el experimento o media poblacional.
τ_i son los efectos ó desviaciones debidas al i-ésimo tratamiento.
β_j es el efecto o desviaciones debidas al j-ésimo bloque.
ε_{ij} es el efecto del componente aleatorio en la j-ésima observación del i-ésimo tratamiento.

Efecto del tratamiento y bloques fijos

Se considerará el bloque fijo como una medida para desarrollar la teoría que sustenta el modelo matemático de componentes de variación , así mismo para el desarrollo posterior de los modelos mixtos y aleatorios, (Hernandez, A. y E. Soto, 1986).

En el caso del Modelo I la población de tratamientos se puede considerar dividida en sub-poblaciones independientes y cada observación Y_{ij}, correspondiente a cada sub-población es una muestra de tamaño uno con distribución normal con media μ_{ij} y varianza σ^2.

$$Y_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2) \quad \text{con} \quad \mu_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j$$

esto implica que las observaciones pertenecientes a la ij-ésima población tienen esperanza μ_{ij} y varianza $\sigma_i^2 = \sigma^2$ en otras palabras existe homocedasticidad.

Prueba de hipótesis

La hipótesis de tratamiento sería:

$$Ho: \mu_{1.} = \mu_{2.} \quad \ldots = \mu_{t.} = \mu$$
$$Ha: \mu_{i.} \neq \mu_{j.} \qquad\qquad i \neq j$$

La media general se puede definir

$$\mu = \frac{\mu_{11} + \mu_{12} + \quad \ldots + \mu_{tr}}{t\,r}$$

Vease en la tabla 5.1 las medias poblacionales de los datos.

Tabla 5.1. Medias Poblacionales de los datos.

	B_1	B_2	...	B_r	$\mu_{i.}$
τ_1	μ_{11}	μ_{12}	...	μ_{1r}	$\mu_{1.}$
τ_2	μ_{21}	μ_{22}	...	μ_{2r}	$\mu_{2.}$
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
τ_t	μ_{t1}	μ_{t2}	...	μ_{tr}	$\mu_{t.}$
	$\mu_{.1}$	$\mu_{.2}$	...	$\mu_{.r}$	

Se puede expresar que:

$$\mu = \frac{\mu_{1.} + \mu_{2.} + \quad ... \; + \mu_{t.}}{t}$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{t} \mu_{i.} / t \tag{5.2}$$

o de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{\mu_{.1} + \mu_{.2} + \quad ... \; + \mu_{.r}}{r}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{r} \mu_{.j} / r \tag{5.3}$$

Las desviaciones de $\mu_{.1}$ con respecto a la media general permite estimar los efectos de tratamiento adicionado con el efecto de bloque.

$$\mu_{ij} - \mu = \tau_i + \beta_j$$

Las desviaciones de Y_{ij} con respecto a la media de su grupo permite obtener la variabilidad aleatoria.

$$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \mu_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

En síntesis, si:

$$Y_{ij} - \mu_{ij} = \varepsilon_{ij} \qquad \mu_{ij} - \mu = \tau_i + \beta_j$$

se puede llegar al componente de varianzas:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

presentando dicho modelo dos restricciones:

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0 \qquad \sum_{j=1}^{r} \beta_j = 0 \tag{5.4}$$

Esperanza y Varianza de Y

$$\begin{aligned} E(Y_{ij}) &= E(\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}) \\ &= \mu + E(\tau_i) + E(\beta_j) + E(\varepsilon_{ij}) \\ &= \mu + \tau_i + \beta_j \\ &= \mu_{ij} \end{aligned} \tag{5.5}$$

$V(Y_{ij}) = V(\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij})$

$V(Y_{ij}) = E(\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij})^2 - [\,E(\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij})\,]^2$

$= E(\varepsilon_{ij})^2$

$= V(\varepsilon_{ij})$

$= \sigma_{\varepsilon}^{2}$ (5.6)

Si se considera que los efectos de bloques y tratamientos son aditivos;

$\mu_{ij} - \mu = \tau_i + \beta_j$

y calculando la sumatoria:

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_{ij} - r\mu = r\tau_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j$$

se divide por r

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_{ij} / r - \mu = \tau_i$$

Si $\tau_i = 0$ implica $\mu_{i.} = \mu$

Esto conduce a la hipótesis nula y alternativa antes citada:

Ho: $\tau_i = 0$ vs. Ha: $\tau_i \neq 0$

El procedimiento es similar para el efecto del bloque.

Efecto de Tratamiento y Bloques aleatorios

Cuando se tienen efecto de tratamiento y bloques aleatorios, la población sería de **tr** subpoblaciones independientes de donde se van a extraer las muestras (Hernández A. y E. Soto, 1986).

La población tendría "T" tratamientos y "R" bloques y se seleccionan aleatoriamente **t** y **r** medias de tratamientos y bloques con **t** $<$ **T** y **r** $<$ **R**.

La sub-población se supone distribuida normal con media μ_{ij} y varianza σ^2. Cuando se seleccionan las muestras, se van a tener sub-poblaciones **n** muestrales distribuidas normalmente.

Hipótesis Estadística:

La hipótesis de tratamiento sería:

Ho: $\mu_{1.} = \mu_{2.} \quad ... = \mu_{t.} = \mu$
Ha: $\mu_{i.} \neq \mu_{j.} \qquad i \neq j$

La media sería expresada como:

$$\mu = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij}/tr$$

Las desviaciones de Y_{ij} con respecto a la media poblacional general es un efecto aditivo de tratamiento y bloque, por lo tanto darían los efectos aleatorios:

$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \mu_{ij}$
$Y_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}$

Por consiguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

Este último sería el modelo de componentes de varianza que es el mismo que se obtuvo cuando los efectos eran fijos, deferenciandose en la forma como fue muestreada la población.

Los supuestos que tendría el modelo serian:

$$\mu_{ij} \sim NID(\mu, \sigma^2_\tau +.\sigma^2_\beta) \qquad \tau_i \sim NID(0, \sigma^2_\tau)$$

$$\beta_j \sim NID(0, \sigma^2_\beta) \qquad \varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$$

$$Y_{ij} \sim NID(\mu, \sigma^2_\tau + \sigma^2_\beta + \sigma^2_\varepsilon)$$

Como se puede observar el efecto de τ_i tiene varianza σ^2_τ y β_j tiene varianza σ^2_β

$$\sigma^2_\tau = V(\tau_i) = E(\tau_i^{\,2}) - [E(\tau_i)]^2 = E(\tau_i^{\,2}) = E(\mu_{i.} - \mu)^2$$

por lo tanto σ^2_τ representa la variación de $\mu_{i.}$ alrededor de μ y a medida que sea $\sigma^2\tau$ sea mayor se debe interpretar que las desviaciones de las medias de los grupos de tratamiento son muy diferentes con respecto a la media general, por lo tanto;

Si $\sigma^2_\tau \Rightarrow 0 \qquad \mu_i \Rightarrow \mu$

y cuando $\sigma^2_\tau = 0$ no hay variación entre las μ_i, esto es, $\mu_{i.} = \mu$

Hipótesis Estadísticas:

Ho: $\sigma^2_\tau = 0$
Ha: $\sigma^2_\tau \neq 0$

Análisis de Varianza:

El análisis de varianza del bloque al azar está basado, por supuesto, en el modelo lineal de acuerdo a la siguiente consideración:

- Los efectos de los tratamientos y de las repeticiones o bloques son aditivos de acuerdo al modelo lineal establecido.
- Las subpoblaciones son normales.
- Las subpoblaciones tienen la misma varianza, es decir, existe homocedasticidad.
- Las muestras son extraídas al azar.

Es conveniente resaltar que las consideraciones hechas son condiciones bajo las cuales la prueba de hipótesis es válida.

Si se indica por i (i = 1,2, ... , t) al tratamiento, por j (j = 1, 2, ..., r) la repetición , de manera que la unidad experimental en el tratamiento i y en la repetición j, puede ser identificada por ij. Habrá tr unidades experimentales en total, cuyo modelo definido anteriormente es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

Notación:

$$Y_{.j} = \sum_{i=1}^{t} Y_{ij}$$ = total de la repetición j.

$$\bar{Y}_{.j} = Y_{.j} \,/\, t$$ = media de la repetición j.

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^{r} Y_{ij}$$ = total del tratamiento i.

$$\bar{Y}_{i.} = Y_{i.} \,/\, r$$ = media del tratamiento i.

	i=1	i=2	i=3	i=4	$Y_{.j}$	$\bar{Y}_{.j}$	$\gamma_{.j}$
j=1	Y_{11}	Y_{21}	Y_{31}	Y_{41}	$Y_{.1}$	$\bar{Y}_{.1}$	$\gamma_{\cdot 1}$
j=2	Y_{12}	Y_{22}	Y_{32}	Y_{42}	Y_{2}	$\bar{Y}_{.2}$	$\gamma_{\cdot 2}$
j=3	Y_{13}	Y_{23}	Y_{33}	Y_{43}	Y_{3}	$\bar{Y}_{.3}$	$\gamma_{\cdot 3}$
$Y_{i.}$	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	$Y_{3.}$	$Y_{4.}$			
$\bar{Y}_{i.}$	$\bar{Y}_{1.}$	$\bar{Y}_{2.}$	$\bar{Y}_{3.}$	$\bar{Y}_{4.}$			
$\tau_{i.}$	$\tau_{1.}$	$\tau_{2.}$	$\tau_{3.}$	$\tau_{4.}$			

El gran total y la media general son:

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i.} = = \sum_{j=1}^{r} Y_{.j}$$

$$\bar{Y}_{..} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i.} / t = \sum_{j=1}^{r} Y_{.j} / r = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} Y_{ij} / t\,r$$

El efecto de las replicaciones y de los tratamientos es

$$\gamma_{.j} = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$$

$$\tau_{i.} = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$$

Con las restricciones:

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_{i.} = 0 \qquad \sum_{j=1}^{r} \gamma_{.j} = 0 \qquad (5.7)$$

De acuerdo a lo anterior Y_{ij} puede ser expresado:

$$Y_{ij} = \bar{Y}.. + (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}..) + (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}..) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}..)$$

$$Y_{ij} = \bar{Y}.. + \tau_{i.} + \gamma_{.j} + \varepsilon_{ij}$$

donde

$$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - (\bar{Y}.. + \tau_{i.} + \gamma_{.j})$$

Estimaciones por mínimos cuadrados

La suma de cuadrados a ser minimizados para lograr los valores apropiados de Y, γ, τ_i es:

$$Q = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}.. - \tau_{i.} - \gamma_{.j})^2$$

$$Q = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^{\ 2}$$

Derivando Q con respecto a $\bar{Y}..$, $\tau_{i.}$, $\gamma_{.j}$ e igualando a cero, se obtienen un conjunto de ecuaciones que pueden ser resueltas, con las restricciones mencionadas en la ecuación 5.7 , quedando entonces, expresiones de la forma:

$$\begin{array}{lll} Y_{11} = \bar{Y}.. - \tau_1 - \gamma_1 & Y_{12} = \bar{Y}.. - \tau_1 - \gamma_2 & Y_{13} = \bar{Y}.. - \tau_1 - \gamma_3 \\ Y_{21} = \bar{Y}.. - \tau_2 - \gamma_1 & Y_{22} = \bar{Y}.. - \tau_2 - \gamma_2 & Y_{23} = \bar{Y}.. - \tau_2 - \gamma_3 \\ Y_{31} = \bar{Y}.. - \tau_3 - \gamma_1 & Y_{32} = \bar{Y}.. - \tau_3 - \gamma_2 & Y_{33} = \bar{Y}.. - \tau_3 - \gamma_3 \\ Y_{41} = \bar{Y}.. - \tau_4 - \gamma_1 & Y_{42} = \bar{Y}.. - \tau_4 - \gamma_2 & Y_{43} = \bar{Y}.. - \tau_4 - \gamma_3 \end{array}$$

Para estimar μ se hace la suma de las doce expresiones, nótese que al estimar el valor de μ se desconoce la media general.

$$\bar{Y}.. = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} Y_{ij} / tr$$

Para estimar γ_1, se ignoran las expresiones que no tienen γ_1 y se hace la suma de las expresiones que involucra a γ_1 y se iguala a cero.

$$\sum_{i=1}^{t} Y_{i1} - t\bar{Y}.. - t\gamma_1 = 0$$

$$\gamma_1 = \bar{Y}_{.1} - \bar{Y}..$$

en forma semejante, al efecto τ

$$\sum_{j=1}^{r} Y_{1j} - rY.. - r\tau_1 = 0$$

$$\tau_1 = Y_{1.} - Y..$$

y así sucesivamente con el resto. En las estimaciones por mínimos cuadrado, el valor $\sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2$ es un mínimo.

Componentes de la Suma de Cuadrados

La desviación total es la desviación de cada valor de la media general y puede ser escrita de la siguiente manera:

$$Y_{ij} - \bar{Y}.. = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}..) + (Y_{.j} - \bar{Y}..) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}..)$$

si se eleva al cuadrado cada uno de los términos y se suman, se obtiene la identidad siguiente:

$$\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = t \sum_{j=1}^{r} (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + r \sum_{i=1}^{t} (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2$$

$$= t \sum_{j=1}^{r} \gamma_j^2 + r \sum_{i=1}^{t} \tau_i^2 + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2 \qquad (5.8)$$

Análisis de Varianza

El esquema de ANAVAR para este diseño aumentado con sus respectivas Esperanzas de los cuadrados medios sera mostrado en la tabla 5.2.

Tabla 5.2. ANAVAR aumentado con las Esperanzas de los Cuadrados Medios.

F. de V	G. de l.	Suma de cuadrados	Cuadrados Medios	Esperanzas de los Cuadrados Medios Modelo Fijo	Modelo Aleatorio
Trat	t - 1	$\sum_{i=1}^{t} Y_{i.}^2/r$ - F.C.	SCTRAT /(t - 1)	$r\sum_{i=1}^{t} \tau_i^2 / (t-1) + \sigma^2_e$	$r\ \sigma^2\tau + \sigma^2_e$
Bloq	r - 1	$\sum_{j=1}^{r} Y_{.j}^2/t$ - F.C.	SCBLOQ / (r - 1)	$t\ \sigma^2\beta + \sigma^2_e$	$t\ \sigma^2\beta + \sigma^2_e$
Error	(t - 1)(r- 1)	SCTOTAL -SCTRAT-SCBLOQ	SCEE /(t - 1)(r - 1)	σ^2_e	σ^2_e
Total	r t - 1	$\sum_{i=1}^{t} Y_{ij}^2$ - F.C.			

donde $F.C = (\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} Y_{ij})^2/rt$

Esperanza de la Suma de Cuadrados:

Si se establece que no hay interacción entre replicaciones y tratamiento, ε_{ij} es independiente y normalmente distribuido con media igual a cero y varianza σ^2. Se supone también que τi y γ_j no están correlacionados, por consiguiente se puede expresar:

$$E(Y_{ij}^2) = E[\ t\mu + \sum \tau_i + t\gamma_j + \sum \varepsilon_{.j}]^2$$

$$E(Y_{ij}^2) = t\mu^2 + t^2\sigma_\beta^2 + t\sigma_\tau^2 + t\sigma_\varepsilon^2 \qquad (5.9)$$

donde $\sigma_\beta^2 = E(\gamma_j^2)$ y la esperanza de los términos producto es cero.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

En la siguiente tabla se presentan los resultados (rendimiento en Kg/parcela de 28 m²) de un ensayo con seis poblaciones de tomate.

Tabla 5.3. Datos en el ejemplo ilustrativo para el diseño en bloques aleatorios.

Población plantas/ha	Trat	I	II	III	IV	Total	$\bar{Y}$
17857	1	49,51	35,27	75,20	86,65	246,63	61,66
23928	2	38,46	55,00	53,51	70,35	217,32	54,33
28571	3	45,05	65,47	87,27	64,96	262,75	65,69
35714	4	47,62	66,11	75,64	74,18	263,55	65,89
47851	5	80,74	62,06	53,79	72,66	269,25	67,31
71428	6	74,97	69,86	82,69	55,25	282,77	70,69
Total		336,35	353,77	428,10	424,05	1542,27	

1. Modelo Lineal Aditivo:

$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

$i = 1,2, \dots, t$ $\qquad$ $j = 1,2, \dots, r$

Y_{ij} = observación del i-ésimo tratamiento en el j-ésimo bloque.
μ = media general.
τ_i = efecto del i-ésimo tratamiento.
β_j = efecto del j-ésimo bloque.
ε_{ij} = efecto aleatorio en el i-ésimo tratamiento y en el j-ésimo bloque que mide el error experimental.

2. Supuestos del Modelo:

Modelo I	Modelo II
$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$	$\tau_i \sim NID(0, \sigma^2_\tau)$
$\beta_j \sim NID(0, \sigma^2_\beta)$	$\beta_j \sim NID(0, \sigma^2_\beta)$
$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$	$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$

3. Hipótesis:

Modelo I Modelo II

Para Tratamientos

Modelo I	Modelo II
Ho: $\tau_i = 0$	Ho: $\sigma^2_\tau = 0$
Ha: $\tau_i \neq 0$	Ha: $\sigma^2_\tau \neq 0$

Para Bloques

Modelo I	Modelo II
Ho: $\sigma^2_\beta = 0$	Ho: $\sigma^2_\beta = 0$
Ha: $\sigma^2_\beta \neq 0$	Ha: $\sigma^2_\beta \neq 0$

4. Esquema del Análisis de Varianza:

Ver Tabla 5.2.

5. Desarrollo del Ejemplo:

Suma de Cuadrados

Suma de Cuadrados de Tratamiento:

$$SCTRAT = \frac{246,63^2 + ... + 282,77}{4} - \frac{1542,27^2}{24} = 643,03$$

Suma de Cuadrados de Bloques:

$$SCBLOQ = \frac{336,35^2 + ... + 424,05^2}{6} - \frac{1542,27^2}{24} = 1120,56$$

Suma de Cuadrados Total:

$SCTOTAL = 49{,}51^2 + 38{,}46^2 + ... + 72{,}66^2 + 55{,}25^2 - 1542{,}27^2/24 = 5015{,}20$

Suma de Cuadrados del Error Experimental:

$SCEE = SCTOTAL - SCTRAT - SCBLOQ = 3251{,}61$

Cuadrados Medios o Varianzas

Cuadrado Medio de Tratamiento:

$CMTRAT = SCTRAT/(t-1) = 643{,}03/5 = 128{,}61$

Cuadrado Medio de Bloque:

$CMBLOQ = SCBLOQ/(r-1) = 1120{,}56/3 = 373{,}52$

Cuadrado Medio del Error Experimental:

$CMEE = SCEE/(t-1)(r-1) = 3251{,}61/15 = 216{,}17$

Análisis de Varianza (ANAVAR)

Fuente de Variación	Grados de libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados medios	Fc
Tratamiento	5	643,03	128,61	0,59
Bloque	3	1120,56	373,52	1,73
Error	15	3251,61	216,17	
Total	23	5015,20		

Prueba de Hipótesis

Para tratamiento:

Fc = CMTRAT / CMEE = $0,59^{N.S.}$

Ftab 5% = 2,90 Ftab 1% = 4,56

Para Bloque:

Fc = CMBLOQ / CMEE = $1,73^{N.S.}$

Ftab 5% = 3,29 Ftab 1% = 5,42

Interpretación:

De acuerdo a los resultados se puede establecer que F no es significativa, por lo tanto, no se rechaza la hipótesis nula, es decir, Ho: $\tau_i = 0$. Esto se puede interpretar como que no hay diferencias entre los tratamientos (poblaciones de plantas estudiadas), los rendimientos promedios correspondientes a las poblaciones de plantas cosechadas fueron estadísticamente iguales.

Para bloques, no se rechaza la hipótesis nula Ho: $\sigma^2_\beta = 0$, por consiguiente no hay diferencias entre los bloques, interpretándose como que existe cierta homogeneidad entre los bloques.

EJERCICIOS

Con un conjunto de datos afín a su investigación, responda las siguientes preguntas:

- Establezca el modelo lineal aditivo describiendo cada uno de los términos del modelo y los subíndices presentes.

- Dé los supuestos del modelo.

- Establezca las hipótesis a probar.

- Escriba el cuadro de ANAVAR de acuerdo al modelo. Considere cuadrados medios esperados y los estadísticos de prueba.

- Realice el ANAVAR.

- Pruebe las hipótesis.

- Interprete los resultados.

DISEÑO EN BLOQUES AL AZAR CON SUBMUESTREO

I.- Modelo Lineal aditivo

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk} \qquad (5.10)$$

i=1,2, ... , t   j = 1,2, ... , r   k = 1, 2 ... , m

β_j = efecto de bloque
ε_{ij} = efecto del error experimental
δ_{ijk} = efecto del error de muestreo

II.- Supuestos

Modelo I	Modelo II
$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$	$\tau_i \sim NID(0, \sigma^2_\tau)$
$\beta_i \sim NID(0, \sigma^2_\beta)$	$\beta_i \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$
$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$	$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$
$\delta_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2_\delta)$	$\delta_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2_\delta)$

Tabla 5.4. Análisis de Varianza para un diseño en bloques al azar con submuestreo

F. de V	G. de l.	Suma de cuadrados	Cuadrados Medios	ECM	F
Tratamiento	$t - 1$ = 10	$\sum_{i=1}^{t} Y_{i..}^2 / rm$ - F.C. = 37019293	SCTRAT / (t - 1) = 3701929,30	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon + mr\sum_{i=1}^{t} \tau_i^2 / (t-1)$	CMTRAT/ CMEE = 3,28
Bloques	$r - 1$ = 3	$\sum_{j=1}^{r} Y_{.j.}^2 / tm$ - F.C. = 6800606	SCBLOQ / (r - 1) = 2266868,7	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon + tm\sum_{j=1}^{r} \beta_j^2 / (r-1)$	CMBLOQ / CMEE = 2,01
Error Experimental	$(t-1)(r-1)$ = 30	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij.}^2 / m$ - F.C. - SCTRAT - SCBLOQ = 33788644	SCEE/(t-1)(r - 1) = 1126288,13	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon$	CMEE / CMEM = 0,54
Error de Muestreo	$rt - (m - 1)$ = 44	SCTotal - SCTRAT- SCBLOQ- SCEE = 91398328	SCEM / rt (m - 1) = 2077234,73	σ^2_δ	
Total	$rtm - 1$ = 87	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m} Y_{ijk}^2$ - F.C. = 169006871			

III.- Hipótesis:

Modelo I

Tratamiento:

Ho: $\tau_i = 0$

Ha: $\tau_i \neq 0$

Bloque:

Ho: $\sigma^2_\beta = 0$

Ha: $\sigma^2_\beta \neq 0$

Error:

Ho: $\sigma^2_\varepsilon = 0$

Ha: $\sigma^2_\varepsilon \neq 0$

ModeloII

Ho: $\sigma^2_\tau = 0$

Ha: $\sigma^2_\tau \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\beta = 0$

Ha: $\sigma^2_\beta \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\varepsilon = 0$

Ha: $\sigma^2_\varepsilon \neq 0$

IV.- Prueba de Hipótesis

$F_c TRAT \geq F_{tab}(\alpha, \ t-1, \ (t-1)(r-1))$ Se rechaza Ho
$F_c TRAT < F_{tab}(\alpha, \ t-1, \ (t-1)(r-1))$ No se rechaza H o

$F_c BLOQ \geq F_{tab}(\alpha, \ r-1, \ (t-1)(r-1))$ Se rechaza Ho

$$F_c BLOQ < F_{tab}(\alpha,\ r-1,\ (t-1)(r-1))\ \text{No se rechaza Ho}$$

$$F_c EE \geq F_{tab}(\alpha,\ (t-1)(r-1)\ ;\ tr(m-1))\ \text{Se rechaza Ho}$$
$$F_c EE < F_{tab}(\alpha,\ (t-1)(r-1);\ tr(m-1))\ \text{No se rechaza H o}$$

Generalmente, se prueba primero el F del error, de manera de que si no hay significación se usa un pool de errores; esto es:

$$CMEE(conjunto) = \frac{SCEE + SCEM}{(t-1)(r-1) + tr(m-1)} \qquad (5.11)$$

Si el FEM da significativo es porque hay diferencia entre las unidades experimentales en el mismo tratamiento.

Ejemplo Ilustrativo

Se analizaron los mismos datos que se utilizaron en el ejercicio del Diseño Completamente Aleatorizado con Submuestreo, (el cual solo se hizo con fines didácticos) , pero ahora es a través del Diseño en Bloques al Azar que fue el diseño que realmente se usó en el montaje del experimento.

El modelo se considera fijo por las razones expuestas anteriormente.

I.- Modelo Lineal aditivo

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$$

$i = 1,2, \ldots, t \qquad j = 1,2, \ldots, r \qquad k = 1, 2 \ldots, m$

II.- Supuestos

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0 \qquad \sum_{j=1}^{r} \beta_j = 0 \qquad \varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$$

$$\delta_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2_\delta)$$

III.- Hipótesis

Ho: $\tau_i = 0$ Ho: $\beta_j = 0$ Ho: $\sigma^2_\varepsilon = 0$

Ha: $\tau_i \neq 0$ Ha: $\beta_j \neq 0$ Ha: $\sigma^2_\varepsilon \neq 0$

IV.- Analisis de los Resultados

Ver Tabla 5.4

Tabla 5.4. Análisis de Varianza para un diseño en bloques al azar con submuestreo

F. de V	G. de l.	Suma de cuadrados	Cuadrados Medios	ECM	F
Tratamiento	t - 1 = 10	$\sum_{i=1}^{t} Y_{i..}^2/rm$ - F.C. = 37019293	SCTRAT / (t - 1) = 3701929,30	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon + mr\sum_{i=1}^{t} \tau_i^2 / (t-1)$	CMTRAT/ CMEE = 3,28
Bloques	r - 1 = 3	$\sum_{j=1}^{r} Y_{.j.}^2/tm$ - F.C. = 6800606	SCBLOQ / (r - 1) = 2266868,7	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon + tm\sum_{j=1}^{r} \beta_j^2 / (r-1)$	CMBLOQ / CMEE = 2,01
Error Experimental	(t-1)(r - 1) = 30	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij.}^2/m$ - F.C. - SCTRAT - SCBLOQ = 33788644	SCEE/(t-1)(r - 1) = 1126288,13	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon$	CMEE / CMEM = 0,54
Error de Muestreo	rt - (m - 1) = 44	SCTotal - SCTRAT- SCBLOQ- SCEE = 91398328	SCEM / rt (m - 1) = 2077234,73	σ^2_δ	
Total	rtm - 1 = 87	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m} Y_{ijk}^2$ - F.C. = 169006871			

Suma de Cuadrados

$$F.C. = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} Y_{ijk}^{2} / trm = (694833{,}73)^2 / 88 = 5486294457$$

Suma de Cuadrados de Tratamiento:

$$SCTRAT = \sum_{i=1}^{t} Y_{i..}^{2} / rm - F.C$$

$$SCTRAT = \frac{(50248{,}56)^2 + (66517{,}40)^2 + \ldots + (58031{,}09)^2}{8} - 5486294457$$

$$SCTRAT = 5523313750 - 5486294457 = 37019293$$

Suma de Cuadrados de Bloque:

$$SCBLOQ = \sum_{j=1}^{r} Y_{.j.}^{2} / tm - F.C$$

$$SCBLOQ = 6800606$$

Suma de Cuadrados del Error Experimental:

$$SCEE = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} Y_{ij.}^{2} / m - F.C - SCTRAT - SCBLOQ$$

$$SCEE = 33788644$$

Suma de Cuadrados del Total:

$$SCTOTAL = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} Y_{ijk}^{2} - F.C.$$

SCTOTAL = 5655301328 - 5486294457 = 169116871

Suma de Cuadrados del Error de Muestreo:

SCEM = SCTOTAL - SCTRAT - SCBLOQ - SCEE

SCEM = 91398328

Prueba de Hipótesis

Para Tratamiento:

Fcal = 3,28 Ftab = 2,18 (10 gl, 30 gl, 0,05)

Ftab = 2,98 (10gl, 30 gl, 0,01)

Para Bloque:

Fcal = 2,01 Ftab = 2,92 (3gl, 30gl, 0,05)

Ftab = 4,51 (3gl, 30gl, 0,01)

Para el Error Experimental:

Fcal = 0,54 Ftab = 1,72 (30gl, 44 gl, 0,05)

Ftab = 2,15 (30 gl, 44 gl, 0,01)

Coeficiente de Variación

$$CV(M) = \frac{\sqrt{CMEM}}{\overline{X}_{general}} x100 = \frac{\sqrt{2077234,73}}{7895,84} x100 = 18\%$$

$$CV(UE) = \frac{\sqrt{CMEE}}{\overline{X}_{UE}} x100 = \frac{\sqrt{1126288,13}}{15791,68} x100 = 7\%$$

Interpretación de Resultados

En este caso los resultados fueron muy semejantes a los obtenidos anteriormente con el Diseño Completamente Aleatorizado con submuestreo, con la diferencia de que aquí se debe interpretar el efecto de bloques, el cual no fue significativo; por lo que se puede asumir que $\beta_j = 0$, o sea que no existió un efecto muy marcado de bloque. Es posible que no haya sido necesario bloquear, sino mas bien realizar el ensayo en forma de Diseño Completamente Aleatorizado, que es más sencillo de manejar y planificar en el campo.

Capítulo 6

DISEÑO DE EXPERIMENTO CUADRADO LATINO

Introducción

El Diseño Cuadrado Latino permite medir la variabilidad en doble sentido o controlar el efecto de dos factores que no se desea que formen parte del error experimental , ya que abultaría dicho error y no se haría eficiente la comparación de los tratamientos.

Con la utilización del diseño se cumplen los tres principios básicos:

a) *Aleatorización*; ya que los tratamientos son asignados aleatoriamente a las unidades experimentales, pero bajo una doble restricción debido a que cada tratamiento debe estar representado en cada hilera o fila y en cada columna del diseño.

b) *Replicaciones*; porque cada tratamiento está repetido tantas veces como columnas o filas tenga el diseño.

c) *Control Local*; ya que el agrupamiento de las unidades experimentales y la asignación al azar de los tratamientos a ellas, se hacen de forma tal de controlar la variabilidad tanto en el sentido de las filas como en el sentido de las columnas.

Ventajas y Desventajas del Diseño Experimental Cuadrado Latino

Su principal ventaja radica en que cuando las condiciones son muy heterogéneas él puede controlar variabilidad en dos sentidos y de esta manera extraer esta alta variabilidad e incorporarla a las fuentes de variación filas y columnas de tal manera de hacer una comparación eficiente de los tratamientos.

Su principal desventaja es que tiene menos grados de libertad para el error experimental que los otros diseños y por consiguiente, si en realidad no existen condiciones experimentales de variabilidad o heterogeneidad en un solo sentido el diseño es menos eficiente que el completamente al azar en el primer caso y que el bloque al azar en el segundo caso.

Modelo Lineal Aditivo

El supuesto fundamental de un diseño cuadrado latino con una observación por unidad experimental es que las observaciones pueden ser representadas por un modelo lineal aditivo, como el siguiente:

$$Y_{ij(k)} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \rho_k + \varepsilon_{ij(k)} \qquad (6.1)$$

para i = 1, 2, ... h j = 1, 2, ... h k = 1,2, ... h.

con las restricciones;

$$\sum_{i=1}^{h} \tau_i = \sum_{j=1}^{h} \gamma_j = \sum_{k=1}^{h} \rho_k = 0 \qquad (6.2)$$

Los $\varepsilon_{ij(k)}$ están distribuidos independientemente y normalmente con media 0 y varianza común σ^2. Puede observarse que se colocaron paréntesis en el subíndice, indicando esto que de ninguna manera puede considerarse que k es independiente de i y j. Los parámetros τ_i, γ_j, ρ_k son efectos verdaderos asociados con el i-ésimo tratamiento, j-ésima fila y k-ésima columna respectivamente.

Supuestos e Hipótesis en el diseño Cuadrado Latino bajo efecto de tratamiento fijo

Los supuestos del modelo lineal aditivo serían los siguientes:

$$\sum_{i=1}^{h} \tau_i = 0$$

$\gamma_i \sim NID(0, \sigma^2_\gamma)$

$\rho_j \sim NID(0, \sigma^2_\rho)$

$\varepsilon_{ij(k)} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$

En este caso se está considerando que los efectos de fila y columna son aleatorios, supuestos que son indispensables para que el investigador pueda extrapolar los resultados obtenidos en determinado campo a otros sitios con condiciones similares a las usadas en la experimentación.

Las hipótesis planteadas son:

Para tratamiento
Ho: $\tau_i = 0$

Ha: $\tau_i \neq 0$

Para fila
Ho: $\sigma^2_\gamma = 0$

Ha: $\sigma^2_\gamma \neq 0$

Para columna
Ho: $\sigma^2_\rho = 0$

Ha: $\sigma^2_\rho \neq 0$

Supuestos e hipótesis en el diseño Cuadrado Latino bajo el efecto de tratamiento aleatorio.

Los supuestos del modelo lineal aditivo serían:

$\tau_i \sim NID(0, \sigma^2_\tau)$

$\gamma_i \sim NID(0, \sigma^2_\gamma)$

$\rho_j \sim NID(0, \sigma^2_\rho)$

$\varepsilon_{ij(k)} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$

En este caso se está considerando a los tratamientos aleatorios, es decir, se parte del supuesto de que en la población existen "T" tratamientos y se extraen al azar "t" muestras, de tal forma que $t < T$.

Hipótesis:

Para tratamiento

Ho: $\sigma^2_\tau = 0$

Ha: $\sigma^2_\tau \neq 0$

Para fila

Ho: $\sigma^2_\gamma = 0$

Ha: $\sigma^2_\gamma \neq 0$

Para columna

Ho: $\sigma^2_\rho = 0$

Ha: $\sigma^2_\rho \neq 0$

El Esquema de ANAVAR para este diseño experimental en los casos de Modelos Fijos y Modelos Aleatorios aumentados con sus respectivas esperanzas de los Cuadrados Medios será mostrado en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1. Esquema de ANAVAR aumentado con las Esperanzas de los Cuadrados Medios para el Diseño Cuadrado Latino.

				Esperanzas de los Cuadrados Medios	
F. de V	G. de l.	Suma de cuadrados	Cuadrados Medios	Modelo Fijo	Modelo Aleatorio
Trat	h - 1	$\sum_{i=1}^{h} Y_{i.}^{2}/h$ - F.C.	SCTRAT / (t - 1)	$h\sum_{i=1}^{h} \tau_i^2/(h-1)+\sigma^2_\varepsilon$	$h\,\sigma^2_\tau + \sigma^2_\varepsilon$
Filas	h - 1	$\sum_{j=1}^{h} Y_{.j}^{2}/h$ - F.C.	SCFILA / (h - 1)	$h\,\sigma^2_\gamma + \sigma^2_\varepsilon$	$h\,\sigma^2_\gamma + \sigma^2_\varepsilon$
Columnas	h - 1	$\sum_{k=1}^{h} Y_{.k}^{2}/h$ - F.C.	SCCOL/(h-1)	$h\,\sigma^2_\rho + \sigma^2_\varepsilon$	$h\,\sigma^2_\rho + \sigma^2_\varepsilon$
Error	(h - 1)(h -2)	DIFERENCIA	SCEE /(h - 1)(h - 2)	σ^2_ε	σ^2_ε
Total	h^2 - 1	$\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{h} Y_{ij}^{2}$ - F.C.			

EJEMPLO ILUSTRATIVO

En la siguiente tabla (Tabla 6.2) se presentan los resultados (rendimiento en Kg./parcela en parcelas de 6,40 m^2) de un ensayo con 5 variedades de papa sembrado en Timotes, Estado Mérida.

Tabla 6.2. Datos en el ejemplo Ilustrativo para el Diseño Cuadrado Latino.

	1	2	3	4	5	Total de fila
1	A 1,7	B 3,0	C 2.5	D 3,0	E 0,6	10,8
2	E 2.0	C 3,6	D 3,2	B 4,0	A 3,0	15,8
3	C 3,0	D 3,0	A 3,0	E 2,0	B 2,4	13,4
4	B 3,0	A 2,7	E 1,1	C 2,2	D 3,1	12,1
5	D 3,2	E 1,7	B 5,4	A 2,6	C 3,3	16,2
Total de Columna	12,9	14,0	15,2	13,8	12.4	68.3

Totales para cada variedad: A=13,0 B=7,8 C=14,6 D=15,5 E=7,4

Promedio para cada variedad: $\bar{A}$=2,60 $\bar{B}$=1,56 $\bar{C}$=2,92 $\bar{D}$=3,10 $\bar{E}$= 1,48

Modelo Lineal Aditivo:

$$Y_{ij(k)} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \rho_k + \varepsilon_{ij(k)} \quad (6.1)$$

para i = 1, 2, ... h j = 1, 2, ... h k = 1,2, ... h.

$Y_{ij(k)}$ representa la observación del i-ésimo tratamiento en la j-ésima fila y k-ésima columna.
μ es el efecto común de todo el experimento o media poblacional.
τ_i son los efectos o desviaciones debidas al i-ésimo tratamiento.
γ_j es el efecto o desviaciones debido a la j-ésima fila.
ρ_k es el efecto o desviaciones debido a la k-ésima columna.
$\varepsilon_{ij(k)}$ es el efecto aleatorio en el i-ésimo tratamiento de la j-ésima fila y k-ésima columna que mide el error experimental.

Supuestos del Modelo:

M(I)	M(II)
$\sum_{i=1}^{h} \tau_i = 0$	$\tau_i \sim NID(0, \sigma^2_\tau)$
$\gamma_j \sim NID(0, \sigma^2_\gamma)$	$\gamma_j \sim NID(0, \sigma^2_\gamma)$
$\rho_k \sim NID(0, \sigma^2_\rho)$	$\rho_k \sim NID(0, \sigma^2_\rho)$
$\varepsilon_{ij(k)} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$	$\varepsilon_{ij(k)} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$

Hipótesis

M(I)	M(II)
Para tratamiento	
Ho: $\tau_i = 0$	Ho: $\sigma^2_\tau = 0$
Ha: $\tau_i \neq 0$	Ho: $\sigma^2_\tau = 0$

Para fila

Ho: $\sigma^2_\gamma = 0$ Ho: $\sigma^2_\gamma = 0$

Ha: $\sigma^2_\gamma \neq 0$ Ha: $\sigma^2_\gamma \neq 0$

Para columna

Ho: $\sigma^2_\rho = 0$ Ho: $\sigma^2_\rho = 0$

Ha: $\sigma^2_\rho \neq 0$ Ha: $\sigma^2_\rho \neq 0$

Esquema del Análisis de Varianza.

Ver Tabla 6.1

Desarrollo del ejemplo.

Suma de Cuadrados

Suma de Cuadrados de Tratamiento:

$$SCTRAT = \frac{13{,}0^2 + \ldots + 7{,}42^2}{5} - \frac{68{,}30^2}{25} = 12{,}2064$$

Suma de cuadrados de Filas:

$$SCFILA = \frac{10{,}8^2 + \ldots + 16{,}20^2}{5} - \frac{68{,}30^2}{25} = 4{,}3424$$

Suma de cuadrados de Columnas:

$$SCCOL = \frac{12{,}90^2 + \ldots + 12{,}40^2}{5} - \frac{68{,}30^2}{25} = 0{,}9344$$

Suma de Cuadrados Total:

$$SCTOTAL = 1.7^2 + \ldots + 3{,}3^2 - 68{,}30^2 / 25 = 21{,}7544$$

Suma de Cuadrados del Error Experimental:

$$SCEE = SCTOTAL - SCTRAT - SCFILA - SCCOL = 4{,}2712$$

Cuadrados Medios o Varianzas

Cuadrado Medio de Tratamiento:

$$CMTRAT = SCTRAT / (h - 1) = 12{,}2064 / 4 = 3{,}0516$$

Cuadrado Medio de Fila:

$$CMFILA = SCFILA / (h - 1) = 4{,}3424 / 4 = 1{,}0856$$

Cuadrado Medio de Columna:

$$CMCOL = SCCOL / (h - 1) = 0{,}9344 - 4 = 0{,}2336$$

Cuadrado Medio del Error Experimental:

$$CMEE = SCEE / (h - 1)(h - 2) = 4{,}2712 / 12 = 0{,}3559$$

Análisis de Varianza (ANAVAR)

Fuente de Variación	*Grados de libertad*	*Suma de Cuadrados*	*Cuadrados medios*	*Fc*
Tratamiento	4	12,2064	3,0516	8,57**
Filas	4	4,3424	1,0856	3,05
Columnas	4	0,9344	0,2336	<1
Error	12	4,2712	0,3559	
Total	24	21,7544		

Prueba de Hipótesis

Para tratamiento:

Fc = CMTRAT / CMEE = 8,57**

Ftab 5% = 3,26 Ftab 1% = 5,41

Para Fila :

Fc = CMFILA / CMEE = $3{,}05^{N.S.}$

Ftab 5% = 3,26 Ftab 1% = 5,41

Para Columna:

Fc = CMCOL / CMEE = < 1^{NS}

Ftab 5% = 3,26 Ftab 1% = 5,41

Interpretación:

Tratamientos

Comparando el F tabulado con el F calculado, se observa que el F calculado es mayor que el F tabulado a un nivel de significación $\alpha = 0{,}01$ por lo que se interpreta que los tratamientos difieren estadísticamente; es decir, se rechaza la hipótesis nula de que los tratamientos son iguales y se acepta la alternativa de que por lo menos uno de los tratamientos es diferente a los demás.

Filas

No se rechaza la hipótesis nula Ho: $\sigma^2_\gamma = 0$; por lo que se concluye que no existe variación estadística entre las medias de rendimiento de las filas.

Columnas

No se rechaza la hipótesis nula Ho: $\sigma^2_\rho = 0$; es decir, no existen diferencias estadísticas significativas entre las medias de rendimiento de las columnas.

EJERCICIOS

Con un conjunto de datos afín a su investigación, responda las siguientes preguntas:

- Establezca el modelo lineal aditivo describiendo cada uno de los términos del modelo y los subíndices presentes.
- Dé los supuestos del modelo.
- Establezca las hipótesis a probar.
- Escriba el cuadro de ANAVAR de acuerdo al modelo. Considere cuadrados medios esperados y los estadísticos de prueba.
- Realice el ANAVAR.
- Pruebe las hipótesis.
- Interprete los resultados.

DISEÑO CUADRADO LATINO CON SUBMUESTREO

I.- Modelo Lineal aditivo

$$Y_{(i)jml} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \beta_m + \varepsilon_{(i)jm} + \delta_{(i)jm} \qquad (6.3)$$

II.- Supuestos

Modelo I	**Modelo II**
$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$	$\tau_i \sim NID(0, \sigma^2_\tau)$
$\alpha_j \sim NID(0, \sigma^2_\alpha)$	$\alpha_j \sim NID(0, \sigma^2_\alpha)$
$\beta_m \sim NID(0, \sigma^2_\beta)$	$\beta_m \sim NID(0, \sigma^2_\beta)$
$\varepsilon_{(i)jm} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$	$\varepsilon_{(i)jm} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$
$\delta_{(i)jml} \sim NID(0, \sigma^2_\delta)$	$\delta_{(i)jml} \sim NID(0, \sigma^2_\delta)$

III.- Hipótesis:

Modelo I

Tratamiento:

Ho: $\tau_i = 0$

Ha: $\tau_i \neq 0$

Filas:

Ho: $\sigma^2_\alpha = 0$

Ha: $\sigma^2_\alpha \neq 0$

Columnas:

Ho: $\sigma^2_\beta = 0$

Ha: $\sigma^2_\beta \neq 0$

Error:

Ho: $\sigma^2_\varepsilon = 0$

Ha: $\sigma^2_\varepsilon \neq 0$

Modelo II

Ho: $\sigma^2_\tau = 0$

Ha: $\sigma^2_\tau \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\alpha = 0$

Ha: $\sigma^2_\alpha \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\beta = 0$

Ha: $\sigma^2_\beta \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\varepsilon = 0$

Ha: $\sigma^2_\varepsilon \neq 0$

IV.- Prueba de Hipótesis

$F_c TRAT \geq F_{tab}(\alpha,\ \text{k}-1,\ (\text{k}-1)(k-2))$ Se rechaza Ho
$F_c TRAT < F_{tab}(\alpha,\ \text{k}-1,\ (\text{k}-1)(k-2))$ No se rechaza Ho

$F_c FILA \geq F_{tab}(\alpha,\ \text{k}-1,\ (\text{k}-1)(k-2))$ Se rechaza Ho
$F_c FILA < F_{tab}(\alpha,\ \text{k}-1,\ (\text{k}-1)(k-2))$ No se rechaza Ho

$F_c COL \geq F_{tab}(\alpha,\ \text{k}-1,\ (\text{k}-1)(k-2))$ Se rechaza Ho
$F_c COL < F_{tab}(\alpha,\ \text{k}-1,\ (\text{k}-1)(k-2))$ No se rechaza Ho

$F_c EE \geq F_{tab}(\alpha,\ (\text{k}-1)(k-2)\ ;\ k^2(m-1))$ Se rechaza Ho
$F_c EE < F_{tab}(\alpha,\ (\text{k}-1)(k-2);\ k^2(m-1))$ No se rechaza Ho

V.- Análisis de Varianza

Se muestra en la tabla 6.3 presentada a continuación.

Tabla 6.3. Esquema de ANAVAR para el Diseño Cuadrado Latino con submuestreo

F de V	*G. de l.*	*Suma de cuadrados*	*C.M.*	*ECM(modelo Tipo I)*	*ECM(modelo Tipo II)*	*F*
Tratamiento	k - 1	$\sum_{i=1}^{k} Y_{i..}^2 / km$ -F.C.	SCTRAT/ (k - 1)	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon + km\sum_{i=1} \tau_i^2 / (k-1)$	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon + km\sigma^2_\tau$	CMTRAT/ACMEE
Filas	k - 1	$\sum_{j=1}^{k} Y_{j..}^2 / km$ -F.C.	SCFILA / (k - 1)	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon + km\sigma^2_\beta$	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon + km\sigma^2_\alpha$	CMFILA/CMEE
Columnas	k - 1	$\sum_{m=1}^{k} Y_{m..}^2 / km$ -F.C.	- SCCOL / (k - 1)	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon + km\sigma^2_\beta$	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon + km\,\sigma^2_\beta$	CMCOL/ CMEE
Error Experimental	(k-1)(k- 2)	$\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} Y_{jm.}^2 / m$ - F.C.	SCEE/(k-1)(k- 2)	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon$	$\sigma^2_\delta + m\,\sigma^2_\varepsilon$	CMEE / CMEM
Error de Muestreo	k^2 (m - 1)	SCTotal - SCTRAT-- SCEE - SCFILA - SCCOL	SCEM / k^2 (m -1)	σ^2_δ	σ^2_δ	
Total	k^2m - 1	$\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} Y_{jml}^2$ -F.C F.C.= $(\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} Y_{jml})^2/k^2m$				

EJERCICIOS

Con un conjunto de datos afín a su investigación, responda las siguientes preguntas:

- Establezca el modelo lineal aditivo describiendo cada uno de los términos del modelo y los subíndices presentes.

- Dé los supuestos del modelo.

- Establezca las hipótesis a probar.

- Escriba el cuadro de ANAVAR de acuerdo al modelo. Considere cuadrados medios esperados y los estadísticos de prueba.

- Realice el ANAVAR.

- Pruebe las hipótesis.

- Interprete los resultados.

Capítulo 7

COMPARACIONES DE MEDIAS. PRUEBAS DE RANGO MÚLTIPLE TEORÍA BÁSICA Y APLICACIONES

Introducción

Cuando se realiza el análisis de varianza y se rechaza la hipótesis nula para un determinado efecto fijo, se llega a la conclusión de que por lo menos una de las medias de los grupos involucrados en esa fuente de variación difiere del resto y no se puede especificar cual de ellas es la que presenta la diferencia. Por ello es de gran utilidad efectuar comparaciones adicionales entre las medias de los grupos o tratamientos. Dichas comparaciones se realizan en términos de los totales de tratamiento Y_{i} ó de los promedios de tratamiento $\bar{Y}_{i}$. Los procedimientos para efectuar las comparaciones se denominan ***métodos de comparación múltiple.***

Estos métodos se ocupan de los procedimientos y tasas de error que no se estudian al aplicar la prueba de "t" y la prueba de "F". Con la primera, se comete un error tipo I al rechazar erróneamente una hipótesis con respecto a un solo parámetro o diferencia de dos parámetros. En el caso de la prueba de "F", la hipótesis incluye muchos parámetros dentro de un experimento; ello se puede considerar como la prueba de hipótesis simultánea con respecto a muchas diferencias, en las que el rechazo general depende de una ó mas diferencias no especificadas.

De allí la necesidad y el origen de las pruebas de comparaciones múltiples de medias. En este capítulo se estudiarán las siguientes pruebas de rango múltiple:

- Mínima Diferencia Significativa (mds)
- Contrastes Ortogonales.
- Prueba de Dunnett.
- Prueba de Sheffé.

- Prueba de Student, Newman y Keuls (S.N.K)
- Procedimiento W de Tukey.
- Prueba de Amplitudes Múltiples de Duncan.
- Prueba t de razón k-bayesiana de Waller-Duncan.
- Prueba de Bonferroni.

Inicialmente se mencionan algunos aspectos importantes en cuanto a los supuestos requeridos para la aplicación de estas pruebas. Posteriormente se ofrecen algunas clasificaciones de las mismas, en base a criterios prácticos, como una guía para su correcta aplicación a casos específicos.

Luego se mencionan los antecedentes, la metodología aplicada en un ejemplo, para finalmente ofrecer una revisión bibliográfica general que ilustre el desarrollo de la investigación en este importante tema a través del tiempo.

Supuestos y Condiciones para la aplicación de las Pruebas de Rango Múltiple

WELCH, B. L. (1951) en su trabajo sobre "una aproximación como alternativa en la comparación de varias medias", resume muy apropiadamente las suposiciones básicas de las pruebas de rango múltiple, al discutir el trabajo de JAMES(1951), señalando:

"Sean Y_t (t = 1,2, ..., k) estadísticos normales e independientes distribuidos con media μ_t y varianzas $\Omega_t \sigma_t^2$ respectivamente, donde las Ω_t son constantes conocidas, siendo μ_t y σ_t^2 desconocidas. Se supone que los datos permiten la estimación de σ_t^2 a través de s_t^2, donde s_t^2 están distribuidas respectivamente como $\chi_t^2 \sigma_t^2 / f_t$ siendo f_t los grados de libertad de χ_t^2. Se supone además que todas las s_t^2 están independientemente distribuidas para cada uno de los Y_t..

El problema consiste luego en probar si los datos son consistentes con respecto a la hipótesis de que todas las μ_t son iguales, es decir, $\mu_t = \mu$ para (t = 1, 2, ..., k)".

Señala el autor que un caso particular de Y_t pueden ser las medias x_t de t muestras de n_t observaciones de k diferentes poblaciones normales cuyas medias y varianzas son μ_t y σ_t^2, respectivamente.

Dado que $V(x_t) = \sigma_t^2/n_t$, se tiene (de acuerdo a lo anterior) que $W_t = 1/n_t$. Cada muestra proporciona estimaciones s_t^2 de σ_t^2. La hipótesis bajo estudio establece si se puede considerar que las poblaciones muestreadas poseen la misma media, bajo la condición de que sus varianzas sean necesariamente iguales.

La suposición de que los datos permiten la estimación de σ_t^2 a través de s_t^2 y la distribución de este estadístico, establece la necesidad de una escala de medida en la variable bajo estudio; por otra parte se refleja la importancia de probar los supuestos con pruebas adecuadas. Tal es el caso de la prueba de Barlett para verificar si todas las muestras estiman la misma varianza.

Se aprecia claramente que las pruebas de rango múltiple requieren del cumplimiento de una serie de supuestos de forma similar al análisis de varianza.

Clasificación de las Pruebas de Rango Múltiple

A continuación se ofrecen dos clasificaciones de las pruebas de rango múltiple las cuales pueden constituir una orientación inicial desde el punto de vista práctico, para su aplicación. En este sentido se describe brevemente cada una de las categorías establecidas.

De acuerdo a su naturaleza

Pruebas predeterminadas

Son aquellas cuya aplicación está "restringida" a las situaciones en las que las comparaciones a realizar son planificadas previamente. En una comparación planeada, se les da nombres a los tratamientos de antemano; no es necesario esperar los resultados, por ejemplo para saber cual tratamiento está asociado con la mayor respuesta (Steel y Torrie, 1990).

Las pruebas predeterminadas pueden conducir a resultados sin validez cuando son aplicadas en comparaciones sugeridas por los datos. Dentro de esta categoría se incluyen las siguientes pruebas:

Mínima Diferencia Significativa (m.d.s)
Contrastes Ortogonales
Prueba de Dunnett

Pruebas de efectos sugeridos por los datos

Son aquellas pruebas que se aplican en situaciones en las que se conoce poco con respecto a la naturaleza de los tratamientos y se vacila en proponer comparaciones con sentido. Estas técnicas son muy utilizadas para comparar todos los posibles pares de medias.

Con respecto a este tipo de pruebas Steel y Torrie, 1990 exponen:

Cuando la hipótesis va a ser sugerida por los datos o se incluyen mas comparaciones que los grados de libertad para los tratamientos, entonces se debe tener mucho cuidado en el procedimiento de prueba.

Se incluyen en este grupo las pruebas:

Prueba de Scheffé
Prueba de Student Newman y Keuls (S.N.K.)
Procedimiento W de Tukey
Prueba de Amplitudes Múltiples de Duncan
Prueba t de razón bayesiana de Waller-Duncan
Prueba de Gabriel
Prueba de Bonferroni

De acuerdo a las comparaciones de interés

Pruebas contra un testigo. Se destacan en esta categoría aquellas pruebas cuyo objetivo es comparar todas las medias de los tratamientos contra un testigo preestablecido. Esta consideración involucra obviamente la necesidad de una planificación previa predeterminada. Se incluye en el presente grupo la prueba de Dunnett.

Pruebas que involucran solo algunas comparaciones. Son aquellas pruebas predeterminadas, con las cuales es posible efectuar solo algunas comparaciones, dentro de las que pueden incluirse o no, las comparaciones contra un testigo. Esta restricción depende de las características de cada prueba. Se incluyen aquí las pruebas:

Mínima diferencia significativa (m.d.s.)
Contrastes Ortogonales

En la m.d.s. pueden efectuarse como máximo, un número de comparaciones igual a los grados de libertad de tratamiento. Con la prueba de los Contrastes, la limitación está determinada por aquellos contrastes que resulten ortogonales.

Pruebas que involucran la comparación de todos los pares de medias. Tal como lo expresa la denominación con estas pruebas es posible comparar las medias de todos los grupos o tratamientos, bien sea que se trate de efectos sugeridos por los datos o que se considere un conjunto planeado. Se estudian en este caso las pruebas:

Prueba de Scheffé
Prueba de Student Newman y Keuls (S.N.K.)
Procedimiento W de Tukey
Prueba de Amplitudes Múltiples de Duncan
Prueba t de razón k-bayesiana de Waller-Duncan
Prueba de Gabriel
Prueba de Bonferroni

Número de Repeticiones por Grupo (Tratamiento)

Un aspecto muy importante a considerar al aplicar cualquier tipo de prueba de rango múltiple, es si el número de repeticiones para los grupos o tratamientos a ser comparados, es o no el mismo. Se desarrollaran cada una de las pruebas mencionadas bajo la suposición de que todos los grupos tienen igual número de repeticiones, sin embargo, se ofrece en algunos casos los ajustes necesarios para el caso de grupos con desigual número de repeticiones.

Desarrollo de las Pruebas

Contrastes

Si se usa alguna prueba de significación para detectar diferencias reales entre tratamientos y se rechaza la hipótesis nula, sabemos que hay diferencias entre las medias pero no sabemos cuales son las medias o que combinación de ellas causan estas diferencias. Es por ello que en muchos métodos de comparación múltiple se utiliza la idea de un contraste. Esto conlleva a una combinación lineal de los totales de tratamientos con el objeto de hacer comparaciones planeadas.

En la comparación de un experimento frecuentemente podemos preparar pruebas **F** para responder preguntas pertinentes. Esto involucra la partición de los grados de libertad y de la suma de cuadrados para los tratamientos en componentes de comparación.

Estas comparaciones son independientes y por lo mismo ortogonales cuando:

- la suma de los coeficientes de la comparación es igual a cero.
- la suma de los productos de los coeficientes correspondientes a dos comparaciones es igual a cero.

Las comparaciones o contraste son un conjunto de funciones lineales de la forma:

$$C = \sum_i C_{i.} y_i \quad \text{con la restricción} \quad \sum_i C_i = 0 \tag{7.1}$$

donde y_i pueden ser totales o medias de tratamientos. La suma de cuadrados de un contraste es igual:

$$SCC = \frac{\left(\sum_i C_i \; y_i\right)^2}{n \sum_i C_i^2} \tag{7.2}$$

donde **n** es el número de observaciones por tratamiento. Cuando el número de observaciones en cada tratamiento es diferente la comparación de las medias requiere que:

$$\sum_{i=1}^{a} n_i C_i = 0 \tag{7.3}$$

se tiene que:

$$SCC = \frac{\left(\sum_i C_i \; y_i\right)^2}{\sum_i n_i \; C_i^2} \tag{7.4}$$

Tal como fue mencionado, los y_i pueden ser totales ó medias de tratamientos, los primeros son mas convenientes para las pruebas, los últimos para la estimación de intervalos de confianza.

Una comparación tiene un grado de libertad así que **t** es la prueba apropiada, pero puede usarse **F** también. Para probar la hipótesis nula de que no existe diferencias entre los tratamientos generalmente es conveniente usar **F** y calcular el numerador a partir de los totales de tratamiento y el denominador la suma de cuadrados del error.

Para probar un contraste se debe comparar la suma de cuadrados del contraste con el cuadrado medio del error. El estadístico que resulta tiene una distribución **F** con 1 y **n-a** grados de libertad.

Contrastes Ortogonales: Dos contrastes como los descritos anteriormente y con coeficientes C_i y D_i respectivamente, son ortogonales si:

$$\sum_{i=1}^{a} C_i D_i = 0 \tag{7.5}$$

o en el caso de repeticiones desiguales:

$$\sum_{i=1}^{a} n_i C_i D_i = 0 \tag{7.6}$$

Si se tiene **a** tratamientos, el conjunto de **a-1** contrastes ortogonales descomponen la suma de cuadrados de tratamiento en **a-1** componentes independientes de un solo grado de libertad, por lo que las pruebas realizadas sobre los contrastes ortogonales son independientes.

Los coeficientes de los contrastes deben ser elegidos antes de realizar el experimento y analizar los datos. Para elegir los coeficientes existen muchas maneras; las siguientes reglas son de utilidad en ese sentido:

1.- Si se van a comparar dos grupos de igual tamaño, simplemente asígnense coeficientes +1 a los miembros de un grupo y -1 a los integrantes del otro grupo.

2.- En la comparación de grupos que contienen distintos números de tratamientos, asígnense al primer grupo tantos coeficientes como número de tratamientos tenga el segundo grupo; y a este último tantos coeficientes del signo opuesto como número de tratamientos tenga el primer grupo. Entonces, si entre cinco tratamientos se quiere comparar los dos primeros con los tres últimos los coeficientes serían +3,+3,-2,-2,-2.

3.- Redúzcanse los coeficientes a los enteros mas pequeños posibles. Por ejemplo, en la comparación de un grupo de dos tratamientos con un grupo de cuatro, en virtud de la regla 2, se tienen los siguientes coeficientes; +4,+4,-2,-2,-2,-2 pero estos pueden reducirse a +2,+2,-1,-1,-1,-1.

4.- Los coeficientes de interacción siempre pueden determinarse mediante la multiplicación de los coeficientes correspondientes a los efectos principales.

Método de Scheffé para comparar todos los contrastes

En muchas situaciones no se sabe de antemano los contrastes que se desean comparar, ó se desea realizar mas de **a-1** comparaciones. En muchos experimentos exploratorios, las comparaciones de interés son descubiertas solo hasta después de un examen preliminar de los datos.

El método de Scheffé (1959) es muy general en el sentido de que todas las posibles comparaciones pueden probarse en cuanto a significancia o bien pueden construirse intervalos de confianza para las correspondientes funciones lineales de parámetros. Esto quiere decir que son permisibles infinito número de pruebas simultáneas, aunque solo se lleve a cabo un número finito, lo que da como resultado una tasa de error no mayor que la planeada. En este sentido el error tipo I es cuando mucho igual a μ en cualquiera de las posibles comparaciones.

Supongamos que se ha determinado un conjunto de m contrastes de las medias de tratamientos de interés que se designará

$$T_u = C_{1u}\mu_1 + C_{2u}\mu_2 + \ldots + C_{au}\mu_a \qquad u = 1, 2, \ldots, m \tag{7.7}$$

al contraste correspondiente usando los promedios de tratamientos $\bar{y}_i$ es:

$$C_u = C_{1u}\bar{y}_1 + C_{2u}\bar{y}_2 + \ldots + C_{au}\bar{y}_a \qquad u = 1, 2, \ldots, m \tag{7.8}$$

Necesariamente, la prueba debe tener un valor crítico alto para la comparación, por ende el poder es bajo. El valor crítico para una comparación de la forma $\sum_{i=1}^{a} C_i\bar{y}_i$ exige el cálculo de C_u, luego el error estándar de este contraste es:

$$Scu = \sqrt{CMEE\sum_{i=1}^{a}(C_{iu}^2/n_i)} \tag{7.9}$$

en donde n_i es el número de observaciones del i-ésimo tratamiento. El valor crítico con que C_u debe ser comparado es :

$$S_{\alpha u} = S_{cu}\sqrt{(a-1)F_{\alpha, a-1, n-a}} \tag{7.10}$$

Para probar la hipótesis de que el contraste T_u difiere significativamente de cero, hay que comparar C_u con el valor crítico $|C_u| \geq S_{\alpha u}$ la hipótesis nula de que el contraste T_u es igual a cero debe ser rechazado.

También puede usarse el procedimiento de Scheffé con el fin de construir intervalos de confianza para todos los posibles contrastes de las medias de tratamientos. Los intervalos de confianza construidos con este procedimiento, por ejemplo:

$$C_u - S_{\alpha u} \leq T_u \leq C_u + S_{\alpha u}$$

son intervalos de confianza simultáneamente verdaderos con un nivel de confianza de al menos 1-α.

Prueba de las Mínimas Diferencias Significativas

Es un procedimiento usado para comparar un conjunto de medias y también para comparar cada una de las medias de un conjunto con un tratamiento control. Este procedimiento fue traído a discusión por Fisher.

El valor de **mds** (el cual representa las mínimas diferencias significativas) es igual al producto de la desviación estándar de la media por $\sqrt{2}$ veces el valor de **t** al nivel de significación α escogido y con **f** grados de libertad asociados con la desviación estándar de la media.

El **mds** es una forma de [illegible]a **t** y simbólicamente se podría establecer:

$$t = \frac{d - \mu_d}{S_d} \qquad (7.12)$$

Sea la diferencia entre dos medias $(\bar{x}_i - \bar{x}_i' = d)$ el límite inferior de los valores que cabría esperar en un 5% ó mas de las veces al obtener muestras de diferencia de medias, donde la media μ_d es igual a cero. Se sustituye **d** por **mds** y μ_d por cero y la fórmula se transforma en:

$$t = mds / s_d$$

resolviendo por **mds**, se tiene:

mds = t s_d; donde $s_d^2 = \frac{s_i^2}{r_i} + \frac{s_i'^2}{r_i'}$ siendo s_i^2 y $s_i'^2$ las varianzas estimadas de los experimentos que reciban los tratamientos i e i′ respectivamente, r_i y r_i' son los números de unidades experimentales que reciben los tratamientos i e i′ respectivamente.

Todas las diferencias entre las medias son comparadas con el **mds** calculado. Si la diferencia excede el mds, se dice que las medias provienen de poblaciones con medias distintas.

Una variación añadida a la prueba de t múltiple a un nivel α es el uso de F ó Z antes de realizar la comparación de medias, y si este muestra significación , entonces la prueba de **t** múltiple es realizada sobre las diferencias entre las medias; de lo contrario la prueba **mds** no debe ser usada para hacer comparaciones entre las medias.

En conexión con estas pruebas de medias, Fisher estableció que los **a-1** grados de libertad provenientes de los α tratamientos pueden ser particionados en **a-1** comparaciones ortogonales, cada una con un grado de libertad, y que es posible obtener una estimación de la varianza del error para cada comparación con un grado de libertad en un número de diseños de experimentos.

La dificultad aquí estriba en que las varianzas de los errores usualmente está asociada con pocos grados de libertad; en consecuencia, la varianza combinada, con un mayor número de grados de libertad, es usada siempre que sea posible. También, mas de **a-1** comparaciones ortogonales es usualmente lo deseado.

El caso más extremo en el uso de la prueba **mds**, es el que compara la media mayor con la menor en un conjunto de **a** tratamientos. En este caso Pearson y Hartley (1966) mostraron que los errores tipo I para los **a** tratamientos no es del 5% para **a** mayor que dos sino mucho mayor.

El tamaño del error tipo I es igual a $[1 - {}_fP_n(Q)]$ donde ${}_fP_n(Q)$ es obtenido a través de la siguiente expresión:

$$ {}_{f}P_{n}(Q) = P_{n}(Q) + (1/f)\ a_{n}(Q) + (1\text{-}f^{2})\ b_{n}(Q) \qquad (7.14)$$

donde P_n, $a_n(Q)$, $b_n(Q)$ se obtienen de la Tabla 1 del trabajo mencionado de Pearson y Hartley.

n = número de tratamientos
f = grados de libertad asociados con el error experimental
$Q = \sqrt{2}\ t_{\alpha;f}$

$t_{\alpha;f}$ = t de Student tabulado para un nivel de significación α y para los grados de libertad asociados con el error experimental (f)

Cochran y Cox (1957) también indican que en la situación extrema en que el experimentador solo compara la diferencia entre la mas alta y la mas baja de las medias de los tratamientos mediante la prueba **t ó mds**, esta diferencia será probablemente considerable aún cuando no exista efecto.

Ellos aseveran que puede demostrarse que con tres tratamientos el valor observado de **t** para la máxima diferencia será mayor que el valor tabulado al nivel del 5% en el 13% de las veces; con seis tratamientos la cifra es del 40%; con diez tratamientos es del 60% y con veinte tratamientos 90%.

Así cuando los experimentadores piensan hacer una prueba **t** al 5%, en realidad la están haciendo a un nivel del 13% para tres tratamientos; 40% para seis tratamientos y así sucesivamente.

Por lo tanto, la prueba **mds** para comparar las diferencias entre la mas alta y la mas baja de las medias, no puede ser usada para más de dos tratamientos en el experimento.

En un análisis de varianza se supone que si s_i^2 estima la misma varianza que $s_{i'}^2$ y que r_i es por regla general igual a $r_{i'}$, por tanto:

$$\text{mds} = t\ \sqrt{\frac{2s^2}{r}} \qquad (7.15)$$

donde s^2 es el cuadrado medio del error, r es el número de repeticiones y t es el valor tabular de t para los grados de libertad del error (f).

Prueba de Student - Newman - Keuls

En 1927, Student sugirió el uso de rangos como procedimientos para rechazar muestras que difieran en una serie de análisis. Newman hizo uso de las ideas de Student para subdividir un grupo de medias de tratamientos ordenados en subgrupos homogéneos y presentó tablas para ciertos valores de q donde:

$$q = \frac{\overline{X}_{max} - \overline{X}_{min}}{s_{\overline{x}}} = \frac{\text{rango}}{\text{desviacion. estandar}} \qquad (7.16)$$

donde

$\overline{X}_{max}$ = la más alta de las medias

$\overline{X}_{min}$ = la más baja de las medias

$s_{\overline{x}} = s/\sqrt{r}$ es un estimado independiente de la desviación estándar de cada media si se tiene el mismo número de observaciones para los tratamientos y todas las desviaciones estándar son iguales.

Las tablas de Newman fueron calculadas basadas en la ley de probabilidad aproximada de ordenamiento estudentizado de Pearson. Más tarde Pearson y Hartley realizaron una tabla similar a la obtenida por Newman. Las tablas fueron calculadas por métodos aproximados. May (1952) recalculó estas tablas con el fin de obtener resultados correctos con más cifras significativas. Esta tabla es reproducida en la Tabla F.

Las últimas líneas (para infinitos grados de libertad) corresponden a los valores calculados por Snedecor (1946) y a los valores usados por Student (1947). La primera columna (n=2) puede ser obtenida multiplicando los valores de $t_{\alpha;f}$ por $\sqrt{2}$. La tabla puede ser extendida para otros valores de α y otros grados de libertad tal como lo explica May (1952) en su trabajo. Es deseable tener más de diez grados de libertad asociados con la estimación del error experimental. Por lo tanto la parte de la tabla de May (1952) relacionada con menos de cinco grados de libertad es omitida.

Al aplicar la prueba de Student-Newman-Keuls (llamada así porque cada uno de ellos contribuyó a su creación) se deben seguir los siguientes pasos:

1.- Escoger un nivel de significación α, el cual usualmente será de un 5% ó 1%.
2.- Calcular la desviación estándar del error $s_{\bar{x}}$ y los valores:

$W_n = q_{\alpha,n}\ s_{\bar{x}}$

$W_{n-1} = q_{\alpha,n-1}\ s_{\bar{x}}$

.

.

.

$W_3 = q_{\alpha,3}\ s_{\bar{x}}$

$W_2 = q_{\alpha,2}\ s_{\bar{x}} = t_{\alpha;f}\ \sqrt{2}\ s_{\bar{x}} = \text{mds}$

3.- Ordenar las medias de los tratamientos desde la más alta a la más baja. Es decir: $\bar{X}_n$, $\bar{X}_{n-1}$, ... $\bar{X}_2$, $\bar{X}_1$; donde $\bar{X}_n$ es la más alta y X_1 es la más baja.

4.- Comparar los rangos de los n tratamientos, $(\bar{X}_n - \bar{X}_1)$ con los W_n calculados . Si $\bar{X}_n - \bar{X}_1$ es mayor que W_n se subdivide las medias en dos grupos de n-1 medias cada uno y se comparan los rangos $\bar{X}_n - \bar{X}_2$ y $\bar{X}_{n-1} - \bar{X}_1$ con W_i y así sucesivamente.

En forma más concisa el procedimiento se podría establecer como: "la diferencia entre cualquiera dos medias en un conjunto de n medias es significativo, si el rango de cada uno de los subconjuntos que contiene la media es significativo, de acuerdo a una prueba de rango escogida a un nivel α".

Prueba de Rangos Múltiples de Duncan

Duncan (1955) propuso una prueba de rangos múltiples que combinan la simplicidad de la Prueba de Student-Newman-Keuls con las ventajas de potencia que su estadístico proporciona. Es decir, la prueba se aparta del procedimiento S-N-K en el cual se emplea un nivel de significancia constante en todas las etapas de la prueba. Para Duncan este nivel de significancia es variable y depende del número de medias que entren en la prueba. La idea es que a medida que el número de medias que se prueban aumenta, menor es la probabilidad de que se asemejen.

Si el rango es de dos medias se debe usar un α en general aceptable como 0.05. Sin embargo, para tres medias $1-(1-\alpha)^2 = 0.0975$ se sugiere usar $\alpha = 0.05$; para cuatro medias $1-(1-\alpha)^3 = 0.14$; para t medias úsese $1-(1-\alpha)^{t-1}$. La tabla G se construye de acuerdo con este planteamiento, a partir de la distribución de amplitud "estudentizada".

De acuerdo a Duncan esta prueba permite al experimentador cometer menor error tipo II pero mayor error tipo I que con la prueba S-N-K. La prueba es esencialmente la misma que la S-N-K excepto que se utilizan tablas distintas.

Prueba de Tukey

En 1953, Tukey propuso un procedimiento de comparación múltiple que está basado en los intervalos. Este procedimiento hace uso de la amplitud "estudentizada" y es aplicable a pares de medias; necesita de un solo valor para juzgar la significancia de todas las diferencias. Es fácil y rápido de comparar ya que sólo se hacen comparaciones por pares. Este procedimiento requiere del uso de q_{α} (a,f) el cual es el punto porcentual superior de tamaño **a** del intervalo "estudentizado" para grupos de medias de tamaño **a** y f grados de libertad del error. Este valor de **q** sirve para determinar el valor crítico de todas las comparaciones independientemente de cuantas medias estén en un grupo.

Ya que solo se hacen comparaciones por pares, el valor crítico es menor que el exigido por Scheffé. El procedimiento consiste en el cálculo de un valor crítico mediante la ecuación:

$$T_{\alpha} = q_{\alpha}(a, f)\, s_{\bar{y}_i} \qquad (7.17)$$

donde q_{α} (a, f) es el punto porcentual y se puede hallar en la tabla de puntos porcentuales superiores de la amplitud estudentizada. Tabla F, en la cual **a** es el número de tratamientos y f corresponde a los grados de libertad del error.

$$s_{\bar{y}_i} = \sqrt{\frac{CME}{n}} \qquad (7.18)$$

Para que un par de medias se declare significativamente diferente

$$|\bar{y}_i - \bar{y}_j| > T_\alpha \qquad (7.19)$$

La prueba de Tukey tiene un nivel de error tipo I de α para todas las comparaciones con base en cada experimento. En consecuencia la prueba de Tukey tiene menos poder que el procedimiento de Duncan o de Student-Newman Keuls.

Esta prueba también puede usarse para cálculos de un conjunto de intervalos de confianza para las diferencias. La verdadera diferencia entre medias poblacionales estimados por $\bar{y}_i$ y $\bar{y}_j$ se estima mediante:

$$IC = |\bar{y}_i - \bar{y}_j| \pm T_\alpha \qquad (7.20)$$

Prueba de Dunnett para la comparación de todas las medias con un control

Probablemente uno de los casos más frecuentemente encontrados es la comparación de un control con cada tratamiento. Por ejemplo, en medicina como también en las industrias se podría desear probar varias drogas nuevas y compararlas con una droga estándar.

Suponga un conjunto de datos a los que se les ha realizado un análisis de varianza, la cual no es necesaria como parte del procedimiento de comparaciones múltiples pero es una forma conveniente de obtener la varianza del error, la cual es requerida para los cómputos a realizarse.

Asuma que uno de los tratamientos es el control. El primer paso es calcular la diferencia de todas las demás medias con la media del tratamiento control.

Ya que la varianza de cada observación se supone s^2 la varianza de la media s^2/n donde n es el número de repeticiones. La varianza de la diferencia entre dos tratamientos es $2s^2/n$ y su desviación estándar es:

$$s_d = \left[\frac{2s^2}{n}\right]^{1/2} \qquad (7.21)$$

cuando hay solo dos medias a comparar se puede utilizar el estadístico "t" de Student, donde:

$$t = \frac{d}{s_d} \tag{7.22}$$

y el intervalo de confianza sería $d \pm t.s_d$. Note que las comparaciones no serían independientes, a juzgar por el criterio de los contrastes ortogonales. Para obtener una prueba de significación conjunta, Dunnett construyó tablas "t" correspondientes al número de tratamientos a ser comparados con el control (ver Tablas H).

Mientras mayor sea el número de tratamientos mayor es el valor t de Dunnett (dut). Obviamente cuando un solo tratamiento ha de ser comparado con el control, el estadístico t de Dunnett es idéntico al estadístico t de Student.

Las conclusiones que se obtengan simultáneamente al aplicar esta prueba tendrán una probabilidad de ser correctas de 0.95.

Como es costumbre, los intervalos de confianza también podrían ser obtenidos para las diferencias de las medias con el control. Ellas son: $d \pm dut.s_d$. donde dut es el estadístico tabulado de Dunnett al nivel de confianza deseado.

Algunas veces el experimentador está solo interesado en saber si el tratamiento en cuestión es mayor que el control. Estas serían las llamadas pruebas de una cola y los intervalos de confianza serían $d - dut.s_d$.Las tablas de los duts de Dunnett para las comparaciones de una sola cola están dados en la tabla I.

Si en el experimento hay alguna forma de bloqueo que pudiese ser considerado aleatorio en lugar de efecto fijo; el modelo del análisis de varianza sería mixto. Esto hace apropiado para la varianza del error el cuadrado medio de la interacción, para las comparaciones de los tratamientos. La prueba de comparaciones múltiples sería:

$$t = \frac{\overline{x}_i - \overline{x}_o}{s\left[\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_o}\right]^{1/2}} \tag{7.23}$$

s = la raíz cuadrada del cuadrado medio de la interacción
$\overline{x}_t$ = media del tratamiento
$\overline{x}_o$ = media del control
n_t = número de repeticiones en el tratamiento
n_o = número de repeticiones en el control

Por supuesto para obtener el t de Dunnett (dut) se busca con los grados de libertad asociados a la interacción. Es de notar que se parte del supuesto de que los grupos tienen la misma varianza. En algunos casos éste supuesto puede ser bastante razonable; pero sin embargo la varianza del grupo control podría ser significativamente mas pequeña que la de los tratamientos, en estas circunstancias las varianzas de los tratamientos y del control pueden ser calculados en forma separada, en este caso el estadístico t apropiado sería:

$$t = \frac{\overline{x}_t - \overline{x}_o}{\left[\dfrac{s_t^2}{n_t} + \dfrac{s_o^2}{n_o}\right]^{1/2}} \qquad (7.24)$$

donde:

s_t^2 = varianza de los tratamientos
s_o^2 = varianza del control

El valor del estadístico t de Dunnett (dut) se busca con los grados de libertad ponderados de las varianzas involucradas. El valor dut que se encuentra tabulado se ajusta por la desigualdad de las varianzas a través de la fórmula: (Dunnett, 1964)

$$1 - \frac{n_t . s_o^2}{n_o . s_t^2} \qquad (7.25)$$

Construcción de las tablas de Dunnett

Los métodos para determinar los valores tabulados de t fueron los mismos para calcular los valores de dos colas ó de una sola cola. Todos los cálculos fueron hechos por computadora (los programas fueron hechos por Dunnett en una LPG30 usando subrutinas para la distribución normal escritos por R.A.Lamn).

Los cálculos involucraban la evaluación numérica de una integral doble. Para cada valor de p mostrado en la tabla y para los grados de libertad 5, 10, 20 e infinito; esta integral doble fue evaluada numéricamente para tres valores sucesivos de t difiriendo en 0.05 tal que el valor deseado de p fuese acotado. Entonces, el valor de t fue determinado fijando una curva de 3 puntos y el resultado fue chequeado calculando directamente el valor de p. Para grados de libertad intermedios los valores tabulados fueron obtenidos por interpolación. Los resultados obtenidos fueron redondeados a dos cifras decimales tal como aparecen en las tablas.

Prueba de Gabriel

Esta prueba fue desarrollada en la Universidad hebrea en Jerusalén, Israel por K.R. Gabriel. El procedimiento fue designado con las siglas STP que representan en inglés SIMULTANEOUS TEST PROCEDURE y que en español significa PROCEDIMIENTO DE PRUEBAS SIMULTANEAS. El procedimiento se propone probar la homogeneidad de todos los conjuntos de medias involucradas en el análisis de la varianza. Las decisiones de significación están basadas en las sumas de cuadrados entre medias que están en un conjunto, se usa el mismo valor crítico como el usado para el test F.

Se dice que las decisiones son transitivas en el sentido de que cada subconjunto que contenga otro subconjunto significativo es por sí mismo significativo. Sin embargo, las decisiones serían incompletas en el conjunto que pueda ser significativo pero no contenga ningún subconjunto significativo, en este caso no se puede inferir heterogeneidad en el conjunto con el grado de confianza especificado.

Un ejemplo de la utilidad de un STP es donde un conjunto de medias es juzgada como significativamente diferentes, pero se sospecha falta de homogeneidad en las varianzas del conjunto.

Descripción de la prueba STP

Se asume que los siguientes datos están disponibles para k poblaciones: $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2, \ldots \bar{x}_k$ son medias normales e independientemente distribuidas con varianzas σ^2/n_1, σ^2/n_2, ..., σ^2/n_k, respectivamente, siendo $n_1, n_2, \ldots, n_k$ conocidas pero σ^2 es desconocido; se tiene también s^2 un estimado independiente e insesgado de σ^2 con n_o grados de libertad.

Cada conjunto **p** de todas o algunas de las k poblaciones se juzga como de varianzas significativamente diferentes, si y solo si:

$$S_p^2 > S_{k-1}^2 \quad F_{\alpha(k-1;\, n_o)} \tag{7.26}$$

donde $F_{\alpha(k-1;\, n_o)}$ es el punto superior de α de la distribución F con k-1 y n_o grados de libertad y S_p^2 es la suma de cuadrados para la hipótesis de homogeneidad de las varianzas de las poblaciones en **p**. Entonces:

$$S_p^2 = \sum_i^p n_i(\bar{X}_i - \bar{X}_p)^2 \tag{7.27}$$

$$\bar{X}_p = \sum_i^p n_i . \bar{X}_i / n_p \tag{7.28}$$

$$n_p = \sum_i^p n_i \tag{7.29}$$

donde $\sum_i^p$ denota la sumatoria sobre todas las muestras de la población en **p**.

Prueba t de Razón Bayesiana de Waller-Duncan

En 1975, Duncan en su afán de perfeccionamiento de los procedimientos para realizar comparaciones múltiples de medias, con la colaboración de Waller propuso la siguiente prueba. Esta prueba se caracteriza porque no interviene un nivel de significancia, en lugar de esto se escoge una gravedad o peso del error tipo I ó tipo II. Se aconseja razones de 50:1, 100:1, 500:1, en vez de α = 0,10; 0,05 y 0,01.

La tabla que se deduce para ser utilizada contienen valores t de riesgo mínimo para k=100. Estos son los únicos valores presentados allí. La tabla se consulta con base en el valor para el contraste **F** de tratamiento por lo cual se calcula el valor de **b**, de acuerdo a la expresión:

$$b = \left| \frac{F}{F-1} \right| \tag{7.30}$$

Luego se va con $q = f_t$ = grados de libertad de tratamiento y $f = f_e$ = grados de libertad del error. Este valor crítico el cual se presenta en tablas y luego se sustituye en la expresión.

$$mds = t\, s_d \tag{7.31}$$

donde **mds** es el valor con el cual van a ser comparadas todas las diferencias de medias.

Es conveniente hacer notar que la prueba F global que se usa como regla de decisión para el análisis de la varianza cuando se analizan las k poblaciones. La probabilidad de que simultáneamente ningún conjunto de poblaciones es significativamente no homogéneo es de al menos 1-α. En otras palabras, la probabilidad de que sea cometido error tipo I es como máximo α.

Todos los cálculos realizados por Gabriel para la realización de esta prueba e incluso un ejemplo numérico es proporcionado en el artículo "Testing homogeneity of all sets of means"de Gabriel, pero no serán incluidos en este trabajo. Sin embargo, es importante notar que el autor sugiere en este artículo que el uso conjunto de la prueba de Scheffé y STP es deseable debido a la similaridad de los procedimientos utilizados en ambos.

Ejemplo Ilustrativo

Se presenta un ejemplo ilustrativo, al cual se le aplica todas las pruebas de comparaciones de medias consideradas en el presente capítulo.

En un experimento se estudió el efecto de diferentes concentraciones de Aroclor 1254, (un bifenil policlorinado; BPC) sobre ratones enjaulados, a los

cuales se les administró el medicamento a través de los alimentos consumidos ad-libitum. El objetivo fue determinar la mejor dosis de sustancia, es decir aquella que produzca la mayor actividad hepática (desdoblamiento en el hígado de sustancias extrañas al organismo en el menor tiempo posible). Después de dos semanas de iniciado el experimento , los ratones fueron inyectados con Nembutal (anestésico) y se registró para los sobrevivientes, el tiempo que permanecieron dormidos. El tiempo dormido es una medida de la actividad de la enzima microsomal hepática. Los resultados se muestran a continuación en la tabla 7.1.

Tabla 7.1. Datos en el ejemplo ilustrativo para comparaciones de medias

Dosis de BBC (Tratamientos)		*Tiempo Dormido (min)*			
1	0,0	55	47	46	53
2	62,5	47	51	40	44
3	500,0	49	44	46	51
4	1000,0	36	41	40	38

Contrastes Ortogonales

Como se tienen 4 tratamientos, se pueden efectuar 3 contrastes a saber:

$$\mu_3 + \mu_4 = \mu_1 + \mu_2$$
$$\mu_2 + \mu_4 = \mu_1 + \mu_3$$
$$\mu_1 + \mu_4 = \mu_2 + \mu_3$$

Por lo tanto:

$$C_1 = -Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4$$
$$C_2 = -Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4$$
$$C_3 = +Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4$$

Los coeficientes (Ci) en estos casos son:

-1	-1	+1	+1
-1	+1	-1	+1
+1	-1	-1	+1

los cuales cumplen con las condiciones de que $\sum C_i = 0$ y además $\sum C_iC_j = 0$ para $i \neq j$. Se conoce, partiendo de los datos de la tabla 7.1 que los totales de tratamiento (dosis) son: $Y_{1.} = 201$, $Y_{2.} = 182$, $Y_{3.} = 190$, $Y_{4.} = 155$, N=16, a=4, N-a=12.

Luego:

$$C_1 = (-1)(201) + (-1)(182) + (+1)(190) + (+1)(155) = -38$$
$$C_2 = (-1)(201) + (+1)(182) + (-1)(190) + (+1)(155) = -54$$
$$C_3 = (+1)(201) + (-1)(182) + (-1)(190) + (+1)(155) = -16$$

Ahora, si n=4 (observaciones/trat) y

$$SCC = \frac{\left(\sum C_i Y_i\right)^2}{n \sum C_i^2}$$

para el primer contraste resulta:

$$SCC_1 = \frac{(-38)^2}{16} = 90,25$$

para el segundo contraste:

$$SCC_2 = \frac{(-54)^2}{16} = 182,25$$

finalmente para el tercer contraste:

$$SCC_3 = \frac{(-16)^2}{16} = 16,00$$

Se calcula a continuación el valor de F a partir de la siguiente expresión:

$$F_{cal} = \frac{C_i}{(CMEE)^{1/2} \left[\dfrac{\sum_{j=1}^{3} C_j^2}{n_j} \right]^{1/2}}$$

Se obtiene el siguiente análisis de la Varianza:

Fuente	g de l.	SC	F
Tratamiento	3	288,5	6,89**
Error	12	167,5	
Total	15	456,0	

Se compara el F tabulado (0,05;1, 12) = 4,75 con el Fcalculado. El

El CMEE = 13,9583 para todos los contrastes. Los valores de F calculados para cada contraste respectivamente:

$$F_1 = \frac{38}{(13,9583)} = 10.17 \qquad F_2 = \frac{56}{(3,736)} = 14,99$$

$$F_3 = \frac{16}{(13,9583)} = 4,28$$

Al comparar los F calculados con el F tabulado se obtiene:

$6,46 > 4,75$ Se rechaza H_o
$13,056 > 4,75$ Se rechaza H_o
$1,146 < 4,75$ No se rechaza H_o

por lo que se puede concluir que:

$\mu_3 + \mu_4 \neq \mu_1 + \mu_2$
$\mu_2 + \mu_4 \neq \mu_1 + \mu_3$
$\mu_1 + \mu_4 = \mu_2 + \mu_3$

Ahora es necesario observar si en la práctica, existe la posibilidad de combinar la dosis de los tratamientos sin afectar la respuesta de los individuos.

Prueba de Scheffé

Para efectuar la prueba de Scheffé es necesario plantear todos los contrastes posibles entre las medias o solo aquellos contrastes de interés para el investigador. En este caso todos los contrastes posibles son :

$H_o: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $\quad H_o: \mu_2 - \mu_3 = 0$ $\quad H_o: \mu_1 - \mu_3 = 0$

$H_o: \mu_2 - \mu_4 = 0$ $\quad H_o: \mu_1 - \mu_4 = 0$ $\quad H_o: \mu_3 - \mu_4 = 0$

Se analizará solo un caso: $H_o: \mu_1 - \mu_3 = 0$. En este caso el contraste C_u viene dado por la expresión:

$$C_u = (+1)\,\overline{y}_1 + (0)\,\overline{y}_2 + (-1)\,\overline{y}_3 + (0)\,\overline{y}_4 = 2.75$$

luego se calcula:

$$S_{cu} = \sqrt{CMEE \sum_{i=1}^{a} (C_{iu}^2 / n_i)}$$

$$S_{cu} = \sqrt{13.9583 \left[\frac{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2}{4} \right]} = 2.64$$

finalmente se calcula:

$$S_{\alpha u} = S_{cu} \sqrt{(a-1) F_{\alpha, a-1, N-a}}$$

$$S_{\alpha u} = 2.64 \sqrt{3(3{,}49)} = 8.54$$

Como $C_u < S_{\alpha u}$ no se rechaza la hipótesis nula. Ello indica que los tratamientos 1 y 3 no son estadísticamente diferentes. De igual forma pueden efectuarse las restantes comparaciones. Una vez obtenidos estos contrastes se concluyó que no existe diferencia entre los tratamientos 1, 2 y 3. Sin embargo la dosis de BPC=1000 (tratamiento 4) si produce un efecto significativamente diferente del resto disminuyendo significativamente el tiempo de recuperación de los ratones.

Prueba de la Mínima Diferencia Significativa (mds)

El valor crítico para la prueba viene dado por:

$$mds = t_{\alpha/2, N-a}.(S_d) = t_{\alpha/2, N-a}\sqrt{CMEE\left[\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right]}$$

$$mds = t_{0.025, 16-4}\sqrt{13.95\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]}$$

$$mds = 2.179\sqrt{6.975} = 5.75$$

Si $\left|\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.}\right| > 5.75$ se concluye que las medias de los tratamientos involucrados en la comparación (i,j) son estadísticamente diferentes. Si se realiza la operación solamente para $H_o: \mu_1 - \mu_3 = 0$, las medias de los tratamientos 1 y 3 respectivamente resultan estadísticamente iguales ya que:

$$\left|\overline{y}_{1.} - \overline{y}_{3.}\right| = 2.75 < 5.75$$

Este proceso se puede repetir para el resto de las comparaciones y así generar los grupos de medias como se verá posteriormente.

Prueba de Student-Newman -Keuls (S.N.K.)

Esta prueba consiste en subdividir un grupo de medias de tratamientos ordenados en subgrupos homogéneos. El procedimiento se basa en calcular un conjunto de valores críticos.

- Se escoge un nivel de significación α, en este caso 0,05
- Se calcula el valor $S_{\overline{y}}$

$$S_{\overline{y}} = \left[\frac{CME}{n}\right]^{1/2} = \left[\frac{13.9583}{4}\right]^{1/2} = 1.868$$

- Se busca en la tabla F correspondiente a los valores de q para $\alpha = 0,05$ y n = 2, 3, 4.

$q_{0,05(2,12)} = 3,08$

$q_{0,05(3,12)} = 3.77$

$q_{0,05(4,12)} = 4,20$

- Luego se calcula W; donde $W = q_{\alpha(p,\,f)}\, S_{\bar{y}}$

$W_2 = 3,08(1,868) = 5.75$

$W_3 = 3,77(1,868) = 7,04$

$W_4 = 4,20(1,868) = 7,84$

- Se ordenan las medias de los tratamientos en orden descendente y se comparan las diferencias de todas las combinaciones con su respectivo valor de W y se obtienen los grupos homogéneos.

$\bar{y}_{1.}$	$\bar{y}_{3.}$	$\bar{y}_{2.}$	$\bar{y}_{4.}$
50.25	47.59	45.50	38.75
	B		A

Por ejemplo, la diferencia entre las medias de los tratamientos 2 y 4 es mayor que el valor de W_2 ; de allí que aparezcan en grupos diferentes. La diferencia entre las medias de los tratamientos 1 y 2 es menor que el valor de W_3 por lo tanto aparecen en un mismo grupo, y así sucesivamente.

Prueba de Duncan

Duncan propuso una prueba de rangos múltiples donde se debe calcular:

$$S_{\bar{y}} = \left[\frac{CME}{n}\right]^{1/2} = \left[\frac{13.9583}{4}\right]^{1/2} = 1.868$$

y luego los valores de la tabla de r (Tabla G) correspondientes al número de medias involucradas en la comparación, obteniéndose:

$r_{0,05(2,12)} = 3,08$

$r_{0,05(3,12)} = 3,23$

$r_{0,05(4,12)} = 3,33$

Luego se calcula V; donde $V = r_{\alpha(p,f)} \quad s_{\bar{y}}$;

$V_2 = 3,08(1,868) = 5.75$

$V_3 = 3,23(1,868) = 6,04$

$V_4 = 3,33(1,868) = 6,22$

De forma similar al procedimiento descrito para la prueba anterior se comparan las diferencias entre las medias con su respectivo valor crítico (V_i) para formar los grupos homogéneos.

$\bar{y}_{1.}$	$\bar{y}_{3.}$	$\bar{y}_{2.}$	$\bar{y}_{4.}$
50.25	47.59	45.50	38.75
	B		A

Prueba de Tukey

En la prueba de Tukey se necesita de un solo valor para juzgar la significación de todas las diferencias y las comparaciones se hacen por pares. Se requiere de :

$q_{\alpha(a,f)}$: punto porcentual
a: tamaño del grupo de medias
f: grados de libertad del error experimental

El procedimiento consiste en calcular:

$$T\alpha = q_{\alpha(a,f)} \; s_{\bar{y}};$$

Si $a = 4, f = N - a = 16 - 4 = 12, \alpha = 0,05; q_{0,05(4,12)} = 4,20$; este valor se busca en la tabla F. Sustituyendo:

$$T\alpha = 4.20(1.,868) = 7,8456$$

Luego para declarar un par de medias significativamente diferentes debe ocurrir que $|\overline{y}_i - \overline{y}_j| > T_\alpha$

Comparación (Pares)	*Diferencia* $|\overline{y}_i - \overline{y}_j|$	T_α
1 - 3	2,75	
1 - 2	4,75	
1 - 4	11,50	>7,8456*
2 - 3	2,00	
2 - 4	6,75	
3 - 4	8,75	>7,8556*

Luego se concluye que los pares de medias de los tratamientos (1 y 4) y también (3 y 4) tienen diferencias significativas.

Prueba de Dunnett

En esta prueba se comparan todas las medias con un control. En este ejemplo ilustrativo, se considera el tratamiento 1 como el tratamiento control y los otros tres tratamientos se comparan con el. El valor crítico a calcular es;

$$d[\alpha,(a-1),f]\sqrt{CMEE(1/n_i + 1/n_j)}$$

Los valores de d pueden ser obtenidos de la tabla H. De allí se obtiene el valor $d_{0,05(4,12)} = 2,88$. En este ejemplo:

$$d_{0,05(4,12)}\sqrt{13,9583(1/4+1/4)} = 2,88\sqrt{13,9583/2} = 7,085$$

Es de notar que $|\overline{y}_4 - \overline{y}_1| = 11,50$ es mayor que el valor crítico, por lo tanto μ_4 y μ_1 son estadísticamente diferentes. De igual manera, se analizan el resto de los pares de medias que se comparan con el control.

Prueba de Waller-Duncan

El valor crítico en esta prueba se obtiene con los siguientes datos:

g.l. = grados de libertad de tratamiento = 3
f = grados de libertad del error experimental = 12
k = 100

Cuyo valor F será tomado para buscar los valores en la tabla titulada "Valores de t de riesgo promedio mínimo Duncan-Waller".

q = 3 (g.l.trat)
f = 12 (g.l.error)

En la tabla se obtienen

F = 6	t = 2,22
F = 6,89	t =?
F = 10	t = 2,125

Interpolando se obtienen t = 2,19875. Luego la mínima diferencia significativa para esta prueba es:

$$\text{m.d.s} = t.s_d = 2{,}198\sqrt{13{,}95(1/4 + 1/4)} = 5{,}8087$$

Al colocar las medias en orden descendente, se puede notar que el tratamiento 4 difiere considerablemente del tratamiento 2 y por ende del resto de los tratamientos. En este caso al comparar tratamiento 4 y tratamiento 2, la diferencia entre las medias es 6,750, el cual es mayor que el valor crítico calculado 5,8087.

Tabla 7.2. Cuadro Comparativo de los Resultados de las Comparaciones de medias

Comparaciones	*Tukey*	*Scheffé*	*mds*
1 - 2			
1 - 3			
1 - 4	**	**	**
2 - 3			
2 - 4			**
3 - 4	**	**	**

Tabla 7.3. Cuadro Comparativo por grupos de tratamiento

Trat	*Scheffé*	*mds*	*SNK*	*Duncan*	*Tukey*	*Waller*
1	A	A	A	A	A	A
3	A	A	A	A	A	A
2	B A	A	A	A	B A	A
4	B	B	B	B	B	B

Se puede concluir que invariablemente en todas las pruebas $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$; e igualmente $\mu_1 \neq \mu_4$, $\mu_3 \neq \mu_4$.

En las pruebas de Scheffé y Tukey, μ_2 no es significativamente diferente de μ_4, sin embargo m.d.s.., SNK, Duncan y Waller-Duncan si detectan diferencias entre ellas.

Otra característica a destacar es que μ_4 es significativamente diferente de las otras medias en la mayoría de las pruebas, pero es de considerar que la dosis asignada a este tratamiento es considerablemente superior a los otros tratamientos.

Capítulo 8

EXPERIMENTOS FACTORIALES

Introducción

En experimentación podemos hablar de dos procedimientos de uso común. Uno que estudia el efecto determinado por diferentes cantidades de un simple factor variable, estableciéndose un control a niveles constantes del resto de los factores actuantes. Es lo que comúnmente se conoce como ***experimentos de factor único***. Por ejemplo, tenemos la comparación de variedades de un cultivo, o la determinación de la mejor distancia de un cultivo, entre otros. El otro tipo de experimentación corresponde a aquellos experimentos que investigan simultáneamente los efectos de diferentes factores, conocidos como *experimentos factoriales.*

Estos procedimientos han sido usados y se usan en las ciencias experimentales dependiendo en general de los objetivos de la investigación. En la investigación de los fenómenos biológicos el uso de los experimentos factoriales es más generalizado que en los físicos por la misma esencia de dichos fenómenos; su complejidad en términos de relación efecto-causas actuantes. Así, por ejemplo, la producción de un cultivo depende de una serie de factores tales como: fertilidad del suelo, humedad del suelo, condiciones climáticas (temperatura, precipitación, humedad relativa, entre otros), densidad de siembra, métodos culturales, capacidad genética de la variedad, entre otros, que por lo general interactuan.

Se puede estudiar el efecto de cada factor por separado cuando los otros se mantienen a niveles constantes, pero este procedimiento de factor único no daría información sobre la dependencia del efecto del factor sobre los niveles de los otros factores; mediante el segundo procedimiento; es decir, los experimentos factoriales, es posible conocer si cada factor ejerce un efecto independiente del resto de los factores variables o si su efecto está relacionado a los cambios de niveles de otros factores.

El concepto de experimentos factoriales está en realidad restringido a un tipo especial de diseño de tratamiento que implica todos los tratamientos posibles resultantes de combinar cada uno de los niveles de los diferentes factores en estudio; es decir, que en el diseño de tratamiento conocido como factorial, cada uno de los posibles tratamientos es una combinación particular de un nivel de cada uno de los factores en estudio. En este sentido cabe hacer diferenciaciones con otros diseños de tratamiento que aun cuando un tratamiento es una combinación particular de un nivel de cada factor, no entran en el experimento todas las combinaciones posibles.

La denominación de *experimentos factoriales completos* sería adecuada para el caso en que el factorial se estudie en todas sus posibles combinaciones y *experimentos factoriales incompletos* cuando algunas combinaciones de interés del factorial serán seleccionadas para el experimento. Existen ciertos diseños de tratamientos que aun cuando se estudia más de un factor no entran en la definición de experimentos factoriales; es el caso, por ejemplo, de experimentos con varias drogas, cada una a varios niveles, pero cada nivel de una droga es un tratamiento; es decir, los niveles de cada droga no se combinan para formar un experimento de tipo factorial. Estos experimentos pueden ser denominados seudofactoriales.

Factores, Niveles, Clasificación de los factores

Factores: Un factor en término estricto sería una causa o variable independiente que puede variar a voluntad del experimentador. Sin embargo, es una connotación convencional para designar una clase de tratamiento o cualquier proceso o manipulación que interviene en un tratamiento. En un factorial sería cada uno de los tratamientos básicos que intervienen en la formación de una combinación de tratamientos. Una distinción que usualmente se hace entre factores es con base en la definición de tratamiento. En este sentido, si un tratamiento es cualquier proceso o condición que es aplicado a una unidad experimental y además la aplicación de los tratamientos en las unidades está bajo el control del experimentador, entonces se distinguen factores de tratamiento propiamente dichos como aquellos aplicados directamente a la unidad experimental y factores de clasificación cuando las unidades experimentales se clasifican en dos o más tipos de clases.

Niveles: El término niveles hace referencia a las diferentes clases, dosis o cantidades de un factor. Un nivel puede ser entonces una clase, estado o cantidad particular de un factor. Por ejemplo, si se van a comparar varias variedades de un cultivo, el factor es la variedad y las diferentes variedades son los niveles del factor variedad. Si se estudia el efecto de nitrógeno sobre el rendimiento de un cultivo, el factor es el nitrógeno y las diferentes dosis o cantidades aplicadas del mismo son los niveles.

Clasificación de los factores: Es conveniente clasificar los factores en los siguientes tipos:

Factores Cualitativos Específicos. Son aquellos en que los niveles no siguen un orden natural y cada nivel es de igual interés. Por ejemplo, diferentes variedades de un cultivo en un ensayo de variedades, diferentes métodos de siembra, etc.

Factores Cuantitativos. Los diferentes niveles se expresan en valores numéricos definidos que corresponden a determinadas cantidades de la variable bajo estudio. Por ejemplo, diferentes cantidades de nitrógeno en un ensayo de fertilizantes, diferentes densidades de siembra en un ensayo de población, etc.

Factores Cualitativos Ordenados. Los niveles del factor se arreglan en algún orden pero no hay una variable cuantitativa natural que describa los niveles o factores cuantitativos en los que los diferentes niveles no corresponden a valores bien definidos sino mas bien a valores agrupados. Por ejemplo, muchos factores de clasificación pertenecen a este grupo; los suelos de un área experimental pueden ser clasificados en áridos, de fertilidad baja, de fertilidad media y muy fértiles. Se puede clasificar un lote de novillos en flacos, medianamente flacos, gordos y muy gordos, de acuerdo a algún agrupamiento previo de sus pesos.

Factores Cualitativos Muestrales. En algunos casos los niveles cualitativos usados no son de mucho interés en sí, sino como una muestra de una población de niveles. Por ejemplo, experimentos repetidos en varios lugares o en varios años, en los que se supone que los sitios escogidos serán una muestra de los lugares donde se harán las recomendaciones finales del experimento y los diferentes años son una muestra de los diferentes años por venir.

Se pueden clasificar los factoriales de acuerdo *al número de factores y al número de niveles que intervienen* de la siguiente manera:

Grupos de p^k, es decir, k factores todos al mismo número de niveles p (la base indica el número de niveles y el exponente el número de factores)

2^k $(2^2;2^3;2^4;\ldots)$ k factores a dos niveles: k = 2, 3, ...
3^k $(3^2;3^3;3^4;\ldots)$ k factores a tres niveles: k = 2, 3, ...
4^k $(4^2;4^3;4^4;\ldots)$ k factores a cuatro niveles: k = 2, 3, ...
entre otros...

Grupos (p x q x s x ....); es decir, distintos número de niveles. Para cada factor 2 x 3 un factor está a dos niveles y el otro a tres. En el caso (3 x 3 x 4) dos factores están a tres niveles y el otro a cuatro y así sucesivamente.

En el caso de dos factores, digamos A y B cada uno a dos niveles; $(a_0;a_1);(b_0;b_1)$; el factorial se indicaría como un 2^2 y constaría de cuatro (4) posibles combinaciones de tratamientos, representados como:

$$(a_0b_0)$$
$$(a_0b_1)$$
$$(a_1b_0)$$
$$(a_1b_1)$$

El análisis factorial implica un análisis de los efectos de los factores a fin de constatar si el efecto de un factor es independiente del otro factor o por el contrario existe interacción.

Efectos Simples, Efectos Principales, Interacción

El incremento de A desde a_0 a a_1, vendrá dada por la diferencia $(a_1 - a_0)$; así tenemos dos efectos de A para cada nivel de B.

$$\text{Efecto de A al nivel } b_0 = a_1b_0 - a_0b_0 = A_1 \qquad (8.1)$$

$$\text{Efecto de A al nivel } b_1 = a_1b_1 - a_0b_1 = A_2 \qquad (8.2)$$

Estos efectos de A a cada nivel de B se llaman efectos simples de A. En forma alternativa:

$$\text{Efecto de B al nivel } a_o = b_1a_o - b_oa_o = B_1 \tag{8.3}$$

$$\text{Efecto de A al nivel } a_1 = b_1a_1 - b_oa_1 = B_2 \tag{8.4}$$

Si los efectos simples de A a los niveles b_o y b_1 son iguales decimos que el efecto de A es independiente de la acción de B. Esto es, $A_1 = A_2$.

De manera que una estimación del efecto de A sería dada por el promedio de los efectos simples; y se denomina *efecto principal de A*.

$$A = \frac{1}{2}(a_1b_1 - a_ob_1 + a_1b_o - a_ob_o) \tag{8.5}$$

$$A = \frac{1}{2}(a_1 - a_o)(b_1 + b_o)$$

De igual manera, *el efecto principal de B* vendrá dada por el promedio de sus efectos simples.

$$B = \frac{1}{2}(a_1b_1 - a_1b_o + a_ob_1 - a_ob_o) \tag{8.6}$$

$$B = \frac{1}{2}(a_1 + a_o)(b_1 - b_o)$$

Si los factores A y B se influyen mutuamente los efectos simples diferirán, es decir $A_1 \neq A_2$ o $B_1 \neq B_2$ y esta diferencia será una medida de la interacción de los factores. Así definimos la interacción como:

$$AB = \frac{1}{2}\{ (a_1b_1 - a_ob_1) - (a_1b_o - a_ob_o) \} \tag{8.7}$$

$$AB = \frac{1}{2}(a_1 - a_o)(b_1 - b_o)$$

$$BA = \frac{1}{2}\{ (a_1b_1 - a_1b_o) - (a_ob_1 - a_ob_o) \}$$

$$BA = \frac{1}{2}(a_1 - a_o)(b_1 - b_o) \tag{8.8}$$

Lo anterior indica que AB = BA, por lo tanto la relación es simétrica. La interacción es la misma tanto si la consideramos desde el punto de vista del factor A como del factor B.

Véase ahora numérica y gráficamente mediante observaciones ficticias, la presencia o ausencia de interacción. Se asume la no existencia de variación no controlada.

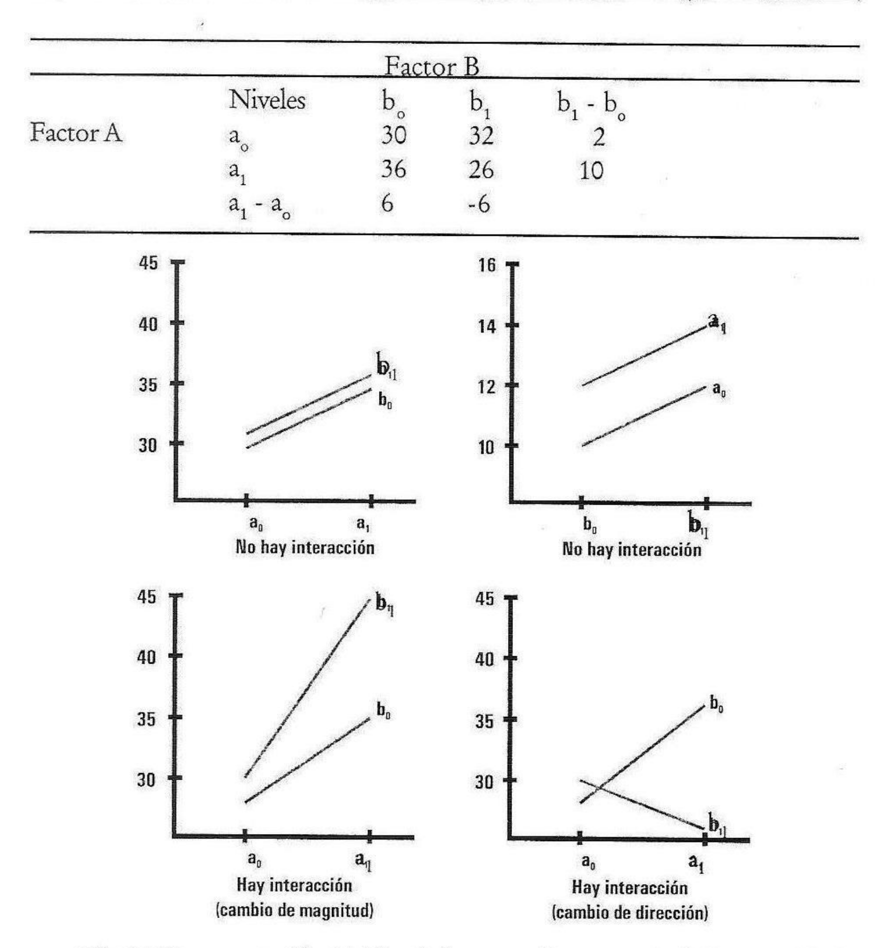
No Interacción

		Factor B		
	Niveles	b_o	b_1	$b_1 - b_o$
Factor A	a_o	30	32	2
	a_1	36	38	2
	$a_1 - a_o$	6	6	

		Factor B		
	Niveles	b_o	b_1	$b_1 - b_o$
Factor A	a_o	10	12	2
	a_1	13	15	2
	$a_1 - a_o$	3	3	

Con Interacción

		Factor B		
	Niveles	b_o	b_1	$b_1 - b_o$
Factor A	a_o	30	32	2
	a_1	36	44	8
	$a_1 - a_o$	6	12	



		Factor B		
	Niveles	b_o	b_1	$b_1 - b_o$
Factor A	a_o	30	32	2
	a_1	36	26	10
	$a_1 - a_o$	6	-6	

Fig 8.1 Representación Gráfica de la presencia o ausencia de Interacción de los factores en un Experimento Factorial.

En el análisis de los resultados de un factorial 2^2 tal como fue descrito anteriormente, es necesario estimar los efectos principales y la interacción AB. Si no se detecta interacción los efectos principales serían entonces las mejores estimaciones de los efectos y sobre los cuales se basarían las interpretaciones de la investigación, en caso contrario es necesario examinar e interpretar la naturaleza de la interacción.

Los efectos A, B y AB satisfacen las condiciones para un conjunto ortogonal de comparaciones. La siguiente matriz ortogonal puede servir para calcular los efectos medios y la suma de cuadrados asociada a cada efecto.

Tabla 8.1. Matriz Ortogonal.

Efecto Factorial	Totales de Tratamiento				Divisor para la media	Divisor para la S.C.	Contribución de la S.C.de tratamiento
	(1)	a	b	ab	2^{k-1}	$r\sum C_i^2$	
A	-1	1	-1	1	2.r	4.r	[A] / 4.r
B	-1	-1	1	1	2.r	4.r	[B] / 4.r
AB	1	-1	-1	1	2.r	4.r	[AB] / 4.r

[A] es el efecto factorial total de A y viene dado por la función:

$$[A] = \sum T_i C_i = \left[-(1) + (a) - (b) + (ab)\right] \quad (8.9)$$

donde T_i es el i-ésimo total de tratamientos representados en nuestro caso por (1), (a), (b), (ab). C_i son los coeficientes que permiten cumplir con el propósito de comparación y ortogonalidad. Así el efecto principal promedio A se estima como:

$$[A] / 2.r = \left[-(1) + (a) - (b) + (ab)\right] / 2\,r \quad (8.10)$$

donde r es el número de repeticiones del experimento. En el Análisis de Varianza, la contribución del efecto Principal de A a la suma de Cuadrados de Tratamiento es [A] / 4.r. La prueba de hipótesis de los efectos se puede realizar por dos vías equivalentes en este caso: **mds** y **F** en el análisis de varianza. Si se utiliza **mds** se debe conocer el error estándar de un efecto factorial.

Definición: Sea $L = C_1\overline{X}_1 + C_2\overline{X}_2 + ... + C_k\overline{X}_k$ una comparación. El error estándar de L es $(\sigma / \sqrt{n})\sqrt{\sum C_i^2}$ y el error estándar estimado será $(s/ \sqrt{n})\sqrt{\sum C_i^2}$ donde n es el número de observaciones de cada media $\overline{X}_i$.

Para el efecto principal promedio de A se tiene que:

$$A = \left[\frac{1}{2}(\overline{a}b) + \frac{1}{2}(\overline{a}) - \frac{1}{2}(\overline{b}) - \frac{1}{2}(\overline{1})\right] \tag{8.11}$$

donde (ab), a, ..., son los promedios de rendimientos sobre r repeticiones. El error estándar estimado de A será:

$$(s/\sqrt{r}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}) = s/\sqrt{r} \text{ cuando } n = r \tag{8.12}$$

Una matriz general ortogonal, (incluyendo la media) puede ser representada como:

$$\begin{bmatrix} [\mu] \\ [A] \\ [B] \\ [AB] \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} (1) \\ (a) \\ (b) \\ (ab) \end{bmatrix}$$

donde $[\mu]$ es la media de tratamientos.

$[A]$ = efecto factorial total de A

$[B]$ = efecto factorial total de B

$[AB]$ = efecto factorial total de AB

Caso de tres factores a dos niveles.

En el estudio de tres factores, digamos A, B y C cada uno a dos niveles; $(a_0; a_1); (b_0; b_1), (c_0; c_1)$ respectivamente, el factorial sería un 2^3 y un total de ocho combinaciones posibles de tratamientos. Las combinaciones resultantes se pueden denotar por las dos formas siguientes:

Tratamiento	I	II
1	$(a_0 b_0 c_0)$	(1)
2	$(a_1 b_0 c_0)$	a
3	$(a_0 b_0 c_0)$	b
4	$(a_1 b_1 c_0)$	ab
5	$(a_0 b_0 c_1)$	c
6	$(a_1 b_0 c_1)$	ac
7	$(a_0 b_1 c_1)$	bc
8	$(a_1 b_1 c_1)$	abc

Se utilizarán ambas notaciones de acuerdo a la conveniencia. Los efectos simples de A se determinan para cada una de las cuatro combinaciones de los otros factores.

$$\begin{aligned}
&\text{Efecto simple de A a niveles } b_0c_0 \text{ fijos} = (a_1b_0c_0 - a_0b_0c_0)\\
&\text{Efecto simple de A a niveles } b_1c_0 \text{ fijos} = (a_1b_1c_0 - a_0b_1c_0)\\
&\text{Efecto simple de A a niveles } b_0c_1 \text{ fijos} = (a_1b_0c_1 - a_0b_0c_1)\\
&\text{Efecto simple de A a niveles } b_1c_1 \text{ fijos} = (a_1b_1c_1 - a_0b_1c_1)
\end{aligned} \qquad (8.13)$$

El efecto principal de A será el promedio de estos 4 efectos simples:

$$A = \tfrac{1}{4}\,[(a_1b_0c_0 - a_0b_0c_0) + (a_1b_1c_0 - a_0b_1c_0) + (a_1b_0c_1 - a_0b_0c_1) + (a_1b_1c_1 - a_0b_1c_1)] \qquad (8.14)$$

esto es, el efecto principal de A es el efecto de A promediado sobre los niveles de los otros factores. A se puede escribir también como :

$$A = \frac{1}{4}(a_1 - a_o)(b_1 + b_o)(c_1 + c_o) \qquad (8.15)$$

La interacción AB se puede medir separadamente para cada nivel de C, así:

Interacción AB al nivel Co

$$= \tfrac{1}{2}\left[(a_1b_1c_o - a_ob_1c_o) - (a_1b_oc_o - a_ob_oc_o)\right] \qquad (8.16)$$

Interacción AB al nivel C_1

$$= \tfrac{1}{2}\left[(a_1b_1c_1 - a_ob_1c_1) - (a_1b_oc_1 - a_ob_oc_1)\right] \qquad (8.17)$$

El promedio de estos dos efectos se toma como una estimación de AB, así:

$$AB = \tfrac{1}{4}\left\{\left[(a_1b_1c_o - a_ob_1c_o) - (a_1b_oc_o - a_ob_oc_o)\right] + \left[(a_1b_1c_o - a_ob_1c_o) - (a_1b_oc_o - a_ob_oc_o)\right]\right\} \qquad (8.18)$$

o también;

$$AB = \frac{1}{4}(a_1 - a_o)(b_1 - b_o)(c_1 + c_o) \qquad (8.19)$$

Las dos interacciones pueden ser diferentes, lo que indicaría un cambio debido a los niveles de C; la diferencia entre estos dos efectos mediría la interacción ABC, así :

$$ABC = \frac{1}{4}\left[a_1b_1c_1 - a_0b_1c_1 - a_1b_0c_1 + a_0b_0c_1 - a_1b_1c_0 + a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0 - a_0b_0c_0\right] \quad (8.20)$$

o también:

$$ABC = \frac{1}{4}\left[\ (a_1 - a_0)(b_1 - b_0)(c_1 - c_0)\ \right] \quad (8.21)$$

Si se usa la notación II, los efectos calculados se indican como sigue:

$$A = \frac{1}{4}\left[\ (a_1 - 1)(b_1 + 1)(c_1 + 1)\ \right] = \left[(abc) - (bc) + (ab) - (b) + (ac) - (c) + (a) - (1\right. \quad (8.22)$$

$$AB = \frac{1}{4}\left[\ (a_1 - 1)(b_1 - 1)(c_1 + 1)\ \right] = \left[(abc) - (bc) + (ab) - (b) - (ac) + (c) - (a) + (1\right. \quad (8.23)$$

$$ABC = \frac{1}{4}\left[\ (a_1 - 1)(b_1 - 1)(c_1 - 1)\ \right] = \left[(abc) - (bc) - (ab) + (b) - (ac) + (c) + (a) - (1\right. \quad (8.24)$$

para los efectos que no aparecen en la explicación las expresiones serían:

$$B = \frac{1}{4}\left[\ (a_1 + 1)(b_1 - 1)(c_1 + 1)\ \right] \quad (8.25)$$

$$C = \frac{1}{4}\left[\ (a_1 + 1)(b_1 + 1)(c_1 - 1)\ \right] \quad (8.26)$$

$$AC = \frac{1}{4}\left[\ (a_1 - 1)(b_1 + 1)(c_1 - 1)\ \right] \quad (8.27)$$

$$BC = \frac{1}{4}\left[\ (a_1 + 1)(b_1 - 1)(c_1 - 1)\ \right] \quad (8.28)$$

estos siete efectos son comparaciones mutuamente ortogonales. Una matriz de transformación ortogonal , incluyendo la media, sería:

$$\begin{bmatrix}[\mu]\\ [A]\\ [B]\\ [C]\\ [AB]\\ [AC]\\ [BC]\\ [ABC]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1\\ -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1\\ -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1\\ -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & +1\\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1\\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1\\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1\\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1)\\ (a)\\ (b)\\ (c)\\ (ab)\\ (ac)\\ (bc)\\ (abc)\end{bmatrix}$$

$[\mu]$ = indica el efecto de la media general.
$[A]$ = indica el efecto factorial total de A y así sucesivamente.

Si el experimento se repite r veces, entonces el divisor para un efecto medio será:

$$2^{k-1}\, r = 4\, r \qquad \text{para } k = 3 \tag{8.29}$$

La contribución de cada efecto a la suma de cuadrados de tratamiento vendrá dado por:

$$\frac{\sum (C_i T_i)^2}{2^k\, r} \tag{8.30}$$

donde los T_i vienen dados por los símbolos (1), (a), (b), ...

Caso General de varios factores a dos niveles.

Con k factores, tales como A, B, C, D, E, ... los efectos principales se pueden representar en forma general por

$$X = \frac{1}{2^{k-1}}(a\pm 1)(b\pm 1)(c\pm 1)(d\pm 1)(e\pm 1)\ldots \tag{8.31}$$

donde X representa un efecto o interacción particular, el signo en cada paréntesis será positivo si la letra no aparece en X y negativo si la letra aparece en X. La notación de la combinación de tratamientos será como la forma II vista anteriormente.

$$A = \frac{1}{2^{k-1}}(a-1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)... \quad (8.32)$$

$$B = \frac{1}{2^{k-1}}(a-1)(b-1)(c+1)(d+1)(e+1)... \quad (8.33)$$

$$AB = \frac{1}{2^{k-1}}(a-1)(b-1)(c+1)(d+1)(e+1)... \quad (8.34)$$

$$ABCD = \frac{1}{2^{k-1}}(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e+1)... \quad (8.35)$$

Para escribir usando todas las combinaciones posibles usando la forma de notación II se procede de la siguiente forma:

(1)	d	e	de	f
a	ad	ae	ade	af
b	bd	be	bde	bf
ab	abd	abe	abde	.
c	cd	ce	cde	.
ac	acd	ace	acde	.
bc	bcd	bce	bcde	
abc	abcd		abce	abcde

Para calcular el número de efectos principales e interacciones, se procede de la forma siguiente:

	Número
Efectos Principales	k
Interacción de dos factores	$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$
Interacción de tres factores	$\binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{3}$
Interacción de cuatro factores	$\binom{k}{4} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4}$
.	
.	
.	
Interacción de k factores	$\binom{k}{k} = 1$
Total	2^{k-1}

La contribución de cualquier efecto a la suma de cuadrados de tratamiento vendrá dado por :

$$[X]^2 / 2^{k-1} r \qquad (8.36)$$

donde $[X]^2$ representa el efecto total. La varianza de cualquier efecto medio será igual a:

$$V(X) = \frac{\sigma^2}{r\,2^{k-2}} \qquad (8.37)$$

donde X es el efecto medio.

Ventajas de los Factoriales

Las ventajas de la experimentación factorial dependerá de la finalidad del experimento. Un propósito de investigación sería el determinar si cada factor ejerce alguna acción sobre la variable respuesta; es decir, el objeto es tener un cuadro amplio de los efectos de los factores en lugar de determinar por ejemplo la combinación de niveles de los factores que dan la respuesta máxima. Como se vio al comienzo, se podría emplear para este propósito el procedimiento de factor único o el procedimiento factorial.

Si se usa el procedimiento experimental del factorial se puede obtener información del efecto de los factores. Si son independientes o existe interacción entre ellos, cosa que no se obtendría mediante el procedimiento de factor único. Además si los factores son independientes en sus efectos, el procedimiento factorial significará un ahorro considerable de tiempo y material dedicado a los experimentos. El ahorro se deriva de dos hechos:

-. cuando los factores son independientes todos los efectos simples de un factor son iguales a su efecto principal de manera que los efectos principales son las únicas cantidades necesarias para interpretar completamente los efectos de los factores.

-. en un experimento factorial, cada efecto principal se estima con la misma precisión como si todo el experimento se hubiese dedicado a ese solo factor ; la varianza de un efecto viene dada por:

$$\frac{\sigma^2}{r\,2^{k-2}}$$

Por ejemplo, en un factorial 2^2 con dos repeticiones, la varianza para el efecto de A es igual a $\sigma^2 / 2$ y el número de unidades experimentales en el experimento sería igual a 8. Si se fuese a medir el efecto de A en un experimento de factor único se hubiese necesitado de las mismas 8 unidades experimentales en el experimento (4 repeticiones y 2 tratamientos), para alcanzar el mismo grado de precisión de $\sigma^2 / 2$, mas aún, de acuerdo al número de factores que se investigue, los experimentos de factor único requerirán el doble, el triple, cuádruple, ..., k veces el material esperimental que requiere un experimento factorial para alcanzar la misma precisión.

Fisher resume las ventajas de los experimentos factoriales así : 1)mayor eficiencia 2) mayor alcance en dos sentidos; 3) permite estimar por separado los efectos de cada factor y sus interacciones, 4) las conclusiones obtenidas de los experimentos factoriales tienen una mayor base inductiva.

Existen también ciertas desventajas en el uso de los factoriales, ellas son:

El factorial se hace impráctico a medida que el número de factores o de niveles se incrementa debido a limitaciones de material experimental o de recursos.

Cuando aumenta el número de combinaciones de tratamiento la magnitud del error experimental también se incrementa, debiéndose recurrir a diseños menos simples para compensar en parte este aumento.

También un aumento en el número de factores introduce dificultades en la interpretación de interacciones de alto orden.

Sin embargo, la utilidad del procedimiento factorial es de innegable importancia y puede ser aplicado a muy variadas situaciones. En general se pueden citar:

-. En trabajos de exploración, en los que el objeto es determinar rápidamente los efectos de cada uno de cierto número de factores dentro de un intérvalo específico.
-. En la comprobación de interacciones.
-. Cuando se quiere encontrar la combinación de los niveles que maximiza la respuesta o en la estimación de la superficie de respuesta general.

-. En experimentos diseñados para poder llegar a recomendaciones que deben aplicarse a una gran variedad decondiciones. En estos experimentos se introducen factores adicionales o auxiliares para examinar los factores principales bajo una variedad de condiciones similares a las encontradas en la población a la cual se va a aplicar dichas recomendaciones.

Factores a tres niveles

En las nociones básicas en relación con factores con dos (2) niveles, se vio el análisis factorial en términos de efectos principales e interacciones. La simplicidad de este análisis surge por el hecho mismo de que cada factor ocurre a dos (2) niveles, y el efecto de cualquiera de los factores no sería mas que la diferencia entre el rendimiento promedio del factor a su más alto nivel y el rendimiento promedio del factor a su más bajo nivel. Cada factor a más de dos niveles da lugar a diferentes enfoques de análisis de acuerdo con el objetivo de la investigación. Si en un experimento factorial entran uno o más factores cuantitativos, un análisis interesante y conveniente es el de estudiar la forma de la curva de respuesta; es decir, si el factor representa cantidades crecientes X de alguna sustancia, es de interés, por ejemplo, examinar si la respuesta Y a los crecientes niveles X del factor, es de naturaleza lineal, cuadrática, etc.

Considere, a manera de ejemplo, un factor a tres (3) niveles. Sea A el factor y los tres (3) niveles indicados mediante a_0, a_1, a_2 con intérvalos iguales; es decir, que a_1 va a tener una unidad adicional a la establecida para a_0 y a_2 tendrá dos unidades adicionales a la establecida para a_0. Para el uso del análisis que sigue es importante que los niveles sean equiespaciados.

Llevemos sobre un gráfico los rendimientos observados, indicados por a_0, a_1, a_2 contra los niveles del factor.

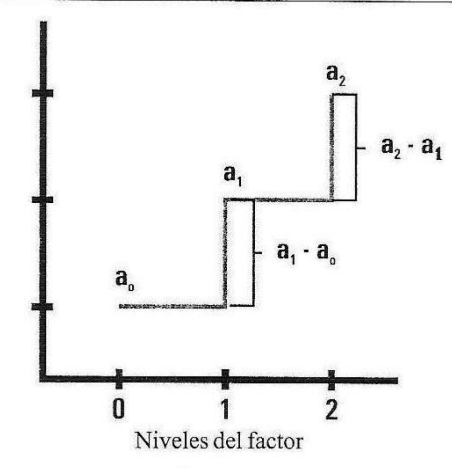


Figura 8.2. Rendimientos observados contra los niveles del factor

Se observa de la figura que hay dos respuestas a una cantidad unitaria del factor:

Incremento de 0 a 1 = $a_1 - a_o$
Incremento de 1 a 2 = $a_2 - a_1$
Suma de Incrementos = $(a_2 - a_1) + (a_1 - a_o) = a_2 - a_o$
Diferencia de incrementos = $(a_2 - a_1) - (a_1 - a_o) = a_2 - 2a_1 + a_o$

Si el incremento producido por la primera unidad fuese igual al incremento producido por la unidad adicional entonces la suma de los incrementos mide el efecto lineal del factor. Si el incremento producido por una unidad adicional del factor es diferente al producido por la primera unidad del factor, entonces la diferencia de incrementos $a_2 - 2a_1 + a_o$ mide la desviación respecto a la linealidad. De manera que las dos cantidades anteriores indican las características de la curva de respuesta.

Definiendo:
-. Efecto Lineal del factor A:

$$A^1 = a_2 - a_o \tag{8.38}$$

-. Efecto Cuadrático del factor A

$$A^2 = a_2 - 2a_1 + a_o \tag{8.39}$$

Como se ve, el efecto principal del factor A está asociado a dos grados de libertad, lo que indica que es posible realizar dos comparaciones mutuamente

ortogonales; los dos componentes efecto lineal y efecto cuadrático son precisamente dos contrastes mutuamente ortogonales del efecto de A. Estos efectos que miden la forma de la curva de respuesta, se conocen como comparaciones ortogonales en regresión. Dependiendo del número de niveles se puede examinar el efecto lineal, cuadrático, cúbico, cuartico de algún factor. Los coeficientes para una comparación ortogonal se derivan del método de polinomios ortogonales.

Dos factores a tres niveles

Sean dos factores A y B cada uno a tres niveles: (a_o, a_1, a_2) y (b_o, b_1, b_2), respectivamente.

Habrá nueve combinaciones de tratamientos asociados a ocho (8) grados de libertad en el análisis de varianza. Un primer esquema del análisis factorial estaría dado por los efectos principales y la interacción AB.

EFECTO	G. DE L.
A	2
B	2
AB	4

Es decir, las diferencias entre los rendimientos de las nueve (9) combinaciones pueden ser expresadas en tres componentes principales de efectos independientes:

Efecto principal de A con dos (2) grados de libertad
Efecto principal de B con dos (2) grados de libertad
La Interacción AB con cuatro (4) grados de libertad.

El efecto principal de A y el efecto principal de B comprenden cada uno dos (2) comparaciones independientes y la interacción AB comprende cuatro (4) comparaciones independientes. Esas ocho comparaciones se pueden realizar con bastante ventaja como comparaciones ortogonales de acuerdo al siguiente esquema:

	Efecto	G. de Libertad	
	A		2
Efecto lineal	A^1	1	
Efecto cuadrático	A^2	1	
	B		2
Efecto lineal	B^1	1	
Efecto cuadrático	B^2	1	
	AB		4
Efecto linealxlineal	A^1B^1	1	
Efecto linealxcuadrático	A^1B^2	1	
Efecto cuadráticoxlineal	A^2B^1	1	
Efecto cuadráticoxcuadrático	A^2B^2	1	
Total			8

Expresiones simbólicas para cada una de las comparaciones ortogonales en regresión:

$$A^1 = (a_2 - a_o)(b_o + b_1 + b_2)$$
$$A^2 = (a_2 - 2a_1 + a_o)(b_o + b_1 + b_2)$$
$$B^1 = (b_2 - b_o)(a_o + a_1 + a_2)$$
$$B^2 = (b_2 - 2b_1 + b_o)(a_o + a_1 + a_2)$$
$$A^1B^1 = (a_2 - a_o)(b_2 - b_o)$$
$$A^1B^2 = (a_2 - a_o)(b_2 - 2a_1 + b_o)$$
$$A^2B^1 = (a_2 - 2a_1 + a_o)(b_2 - b_o)$$
$$A^2B^2 = (a_2 - 2a_1 + a_o)(b_2 - 2a_1 + b_o)$$

Interpretación de los efectos e interacciones de dos factores a tres (3) niveles en función de la naturaleza de la curva de respuesta

Supongase una tabla 3x3 en la que aparece los nueve (9) totales de rendimiento de las combinaciones de tratamientos de los factores A y B a tres (3) niveles cada uno.

		Factor B			
		b_0	b_1	b_2	Total
	a_0	$(a_0 b_0)$	$(a_0 b_1)$	$(a_0 b_2)$	$[a_0]$
Factor A	a_1	$(a_1 b_0)$	$(a_1 b_1)$	$(a_1 b_2)$	$[a_1]$
	a_2	$(a_2 b_0)$	$(a_2 b_1)$	$(a_2 b_2)$	$[a_2]$
Total		$[b_0]$	$[b_1]$	$[b_2]$	

cada símbolo $(a_0 b_0)$, $(a_0 b_1)$, ... dentro de la tabla equivale al total de rendimiento para la combinación indicada por los subíndices. Los totales marginales para los niveles de A se indican como a_0, a_1, a_2 ; e igualmente para los totales marginales de B. El componente A^1 (efecto lineal de A) puede estimarse separadamente a cada nivel de B. Cada uno de estos componentes los llamaremos efectos lineales simples de A; así:

$A^1(0) = (a_2 - a_0)b_0$ efecto lineal de A al nivel 0 de B

$A^1(1) = (a_2 - a_0)b_1$ efecto lineal de A al nivel 1 de B

$A^1(2) = (a_2 - a_0)b_2$ efecto lineal de A al nivel 2 de B

El efecto lineal total A^1 es la suma de los lineales simples.

$$A^1 = (a_2 - a_0)(b_0 + b_1 + b_2) \text{ ó } ([a_2] - [a_0]) \qquad (8.40)$$

De la misma manera el componente A^2 (efecto cuadrático de A) puede estimarse separadamente para cada nivel de B. Se puede medir tres componentes cuadráticos simples, a saber:

$A^2(0) = [(a_2 - a_1)b_0 - (a_1 - a_0)b_0]_=$ efecto cuadrático de A al nivel 0 de B.

$A^2(1) = [(a_2 - a_1)b_1 - (a_1 - a_0)b_1]_=$ efecto cuadrático de A al nivel 1 de B.

$A^2(2) = [(a_2 - a_1)b_2 - (a_1 - a_0)b_2]_=$ efecto cuadrático de A al nivel 2 de B.

El efecto cuadrático total A^2 será la suma de los tres efectos simples:

$$A^2 = [(a_2 - a_1) - (a_1 - a_o)](b_o + b_1 + b_2) = ([a_2] - [a_1]) - ([a_1] - [a_o]) = [a_2] - 2[a_1] + [a_o] \quad (8.41)$$

Alternativamente para B sus efectos lineales simples serían:

$$B^1(0) = (b_2 - b_o)a_o$$

$$B^1(1) = (b_2 - b_o)a_1$$

$$B^1(2) = (b_2 - b_o)a_2$$

Efecto lineal total

$$B^1 = (b_2 - b_o)(a_o + a_1 + a_2) \text{ ó } ([b_2] - [b_o]) \quad (8.42)$$

Los efectos cuadráticos de B serían:

$$B^2(0) = [(a_2 - a_1)b_o - (a_1 - a_o)b_o]$$

$$B^2(1) = [(a_2 - a_1)b_1 - (a_1 - a_o)b_1]$$

$$B^2(2) = [(a_2 - a_1)b_2 - (a_1 - a_o)b_2]$$

El efecto cuadrático total:

$$B^2 = [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_o)](a_o + a_1 + a_2) = ([b_2] - [b_1]) - ([b_1] - [b_o]) = [b_2] - 2[b_1] + [b_o] \quad (8.43)$$

Como se ve la interacción AB con 4 grados de libertad puede ser subdividida en los siguientes componentes ortogonales:

$$A^1B^1 = (a_2 - a_0)(b_2 - b_0) = (a_2 - a_0)b_2 - (a_2 - a_0)b_0 = A^1(2) - A^1(0)$$

o también

$$A^1B^1 = (b_2 - b_0)(a_2 - a_0) = (b_2 - b_0)a_2 - (b_2 - b_0)a_0 = B^1(2) - B^1(0) \quad (8.44)$$

en forma similar,

$$A^1B^2 = (a_2 - a_0)\left[(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\right]$$

$$A^1B^2 = (a_2 - a_0)b_2 - 2(a_2 - a_0)b_1 + (a_2 - a_0)b_0 \quad (8.45)$$

$$A^1B^2 = A^1(2) - 2A^1(1) + A^1(0)$$

o también

$$A^1B^2 = \left[(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\right]a_2 - \left[(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)\right]a_0$$

$$A^1B^2 = B^2(2) - B^2(0) \quad (8.46)$$

de igual forma;

$$A^2B^1 = \left[\left[(a_2 - a_1) - (a_1 - a_0)\right]b_2 - \left[(a_2 - a_1) - (a_1 - a_0)\right]b_0\right]$$
$$= A^2(2) - A^2(0)$$

o también

$$A^2B^1 = (b_2 - b_0)a_2 - 2(b_2 - b_0)a_1 + (b_2 - b_0)a_0$$
$$= B^1(2) - 2B^1(1) + B^1(0) \quad (8.47)$$

$$A^2B^2 = [[(a_2 - a_1)-(a_1-a_0)]b_2-[(a_2-a_1)-(a_1-a_0)]b_1] \quad (8.48)$$
$$-[[(a_2-a_1)-(a_1-a_0)]b_1-[(a_2-a_1)-(a_1-a_0)]b_0]$$

$$= A^2(2)-A^2(1)-[A^2(1)-A^2(0)]$$
$$= A^2(2)-2A^2(1)+A^2(0)$$

Si se supone que la forma de la curva de A es lineal y si los niveles de B no afectan su pendiente, entonces los efectos lineales simples tendrán igual pendiente (ver Figura 8.3), bajo estas condiciones una recta de pendiente promedio sobre los niveles de B sería de mejor estimación y se basaría en los totales marginales expresados en la ecuación (8.40).

Si se supone ahora que la forma de la curva de A sigue siendo lineal pero que la pendiente está afectada por los niveles de B, la medida de este efecto estará dada por dos componentes de interacción independientes: el componente $A^1 B^1$ y el componente $A^1 B^2$ (véase Figura 8.3.2.a y 8.3.2.b) En 8.3.2.a la interpretación

es la misma de la interacción AB de un factorial 2^2; es decir, se mide la diferencia del efecto de A a los niveles b_o y b_2 de B. Note que de acuerdo a (8.44), sería una comparación entre $A^1(2)$ versus $A^1(0)$. Esto indica que es una comparación entre las pendientes de las rectas de regresión de Y sobre A estimadas para los niveles b_o y b_2 de B. En 8.3.2.b interviene además la recta de regresión estimada al nivel b_1 de B. La comparación A^1B^2 equivale a la ecuación (8.45), esto es,

$$A^1(2) - 2A^1(1) + A^1(0)$$

lo que indica que es la comparación del promedio de las pendientes de las rectas de regresión de A a los niveles 2 y 0 de B contra la pendiente de la recta de A al nivel b_1 de B.

Si la forma de la curva de A es cuadrática y si los niveles de B no afectan su pendiente en ningún punto de su recorrido, entonces los efectos simples cuadráticos serían iguales y las curvas tendrían igual pendiente en cualquier punto de su recorrido (vea Figura 8.3.3), bajo estas condiciones el componente cuadrático promedio sería el de mejor estimación y se basaría en los totales marginales expresados en la ecuación (8.41).

En el caso de que exista interacción con los niveles de B entonces existen dos componentes independientes de la interacción A^2B: A^2B y A^2B^2. (Ver Figuras 8.3.4.a y 8.3.4.b) En Figura 8.3.4.a se observa que la forma cuadrática de la curva está afectada por los niveles de B. Este componente solo mide los cambios de forma de la curva a los niveles b_2 y b_o de B. Es de notar que la ecuación (8.47) lo expresa como la comparación entre el componente cuadrático $A^2(2)$ al nivel b_2 de B con el componente cuadrático $A^2(0)$ al nivel b_o de B. En la figura 8.3.4.b se observa que en la comparación A^2B^2 entra la curva determinada al nivel b_1 de B.

$$A^2B^2 = A^2(2) + A^2(0) - 2\,A^2(1)$$

que indica la comparación entre el promedio de los componentes cuadráticos a los niveles 2 y 0 de B contra el componente cuadrático $A^2(1)$ determinado al nivel 1 de B.

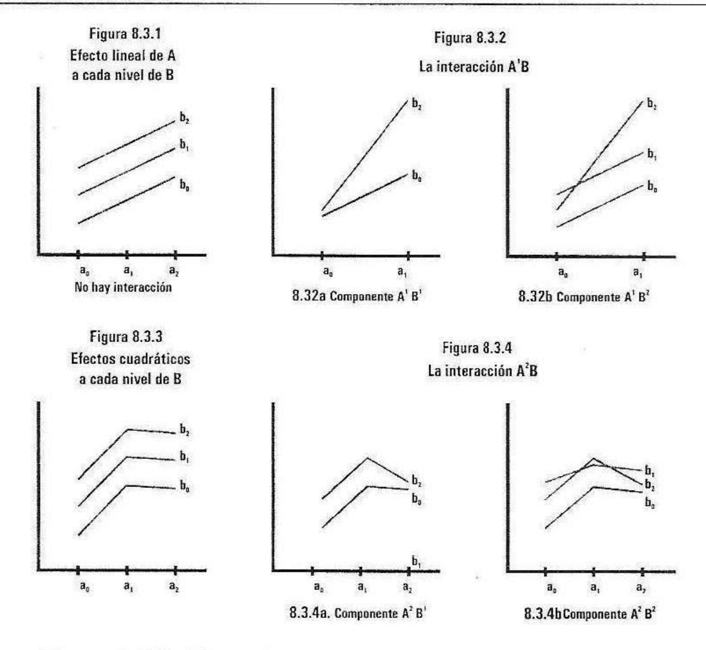


Figura 8.3 Gráficos de interacción

Contribución a la Suma de Cuadrados

Cada uno de los componentes antes descritos son mutuamente ortogonales asociados cada uno con un grado de libertad. Hay ocho componentes ortogonales y cada uno contribuye independientemente a la suma de cuadrados de tratamiento. Por ejemplo, la contribución de X a la suma de cuadrados de tratamiento es:

$$SC(X) = \frac{[X]^2}{n\sum C_i^2} \tag{8.49}$$

donde

$[X]$ = el efecto total

n = número de observaciones de los totales que entran en la comparación

$\sum C_i^2$ = suma de cuadrados de los coeficientes que entran en esa comparación.

Por ejemplo, los coeficientes para el efecto lineal y cuadrático de un factor a tres (3) niveles son:

Niveles	Coeficientes lineales	Coeficientes cuadráticos
0	-1	1
1	0	-2
2	1	1

Considérense ahora algunos métodos para calcular $[X]$:

Método 1

Se calcula directamente utilizando las expresiones algebraicas para los efectos, así:

$A^1 = a_2 - a_o$

$A^2 = a_2 - 2a_1 + a_o$

donde a_o, a_1, a_2 son totales marginales en la tabla 3x3.

$$A^1B^1 = (a_2 - a_o)(b_2 - b_o) = (a_2b_2 - a_2b_0 - a_0b_2 + a_ob_o)$$

donde $(a_2b_2), (a_2b_o), \ldots$, son totales de la combinación de tratamientos y que entran en el cuerpo de la tabla.

Método 2

Se forma una tabla 3x3 con los totales de tratamientos en el cuerpo de la tabla y los totales marginales de A y de B.

		Factor B							
		b_o	b_1	b_2	Total	Lineal	A^1	Cuadrático	A^2
	a_o	$(a_o b_o)$	$(a_o b_1)$	$(a_o b_2)$	$[a_o]$	-1	$-[a_o]$	1	$[a_0]$
Factor A	a_1	$(a_1 b_o)$	$(a_1 b_1)$	$(a_1 b_2)$	$[a_1]$	0	0 -	- 2	$-2[a_1]$
	a_2	$(a_2 b_o)$	$(a_2 b_1)$	$(a_2 b_2)$	$[a_2]$	1	$[a_2]$	1	$[a_2]$
Total		$[b_o]$	$b_1]$	$[b_2]$					
Lineal		-1	0	1					
B^1		$-[b_o]$	0	$[b_2]$					
Cuadrático		1	-2	1					
B^2		$[b_o]$	$-2[b_1]$	$[b_2]$					

Los componentes lineal y cuadrático de los efectos principales A y B se calculan de los respectivos totales marginales. Para calcular los cuatro componentes de la interacción AB, se procede a formar las matrices 3x3 cuyos elementos son

los coeficientes que multiplicaran a los totales de tratamientos que ocupan la misma posición en la tabla 3x3. Para hallar las respectivas matrices se procede como sigue:

Componente | Producto de Matrices | Matriz de Coeficientes

A^1B^1

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A^1B^2

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

A^2B^1

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A^2B^2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si se quiere calcular, por ejemplo, A^1B^1; la matriz A^1B^1 dice que todos los productos serán nulos menos los de los extremos, así:

$$A^1B^1 = (a_o b_o)\,1 + (a_o b_2)(-1) + (a_2 b_o)(-1) + (a_2 b_2)(1) = (a_2 b_2 - a_2 b_0 - a_0 b_2 + a_o b_o)$$

que coincide con el obtenido anteriormente. Además:

$$SC(A^1B^1) = \frac{\left[A^1B^1\right]^2}{n\sum C_i^2} \qquad (8.50)$$

donde $n = r$ ya que cada total es la suma de r repeticiones.

$$\sum C_i^2 = 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4$$

$$SC(A^1) = \frac{\left[A^1\right]^2}{n\sum C_i^2} \qquad (8.51)$$

donde n = sxr ya que cada total $\left[a_i\right]$ es la suma de s niveles de B y de r repeticiones.

Método 3

El otro método es formar una matriz completa, escribiendo en una columna las combinaciones de tratamientos y luego en las columnas siguientes los coeficientes de las respectivas comparaciones.

Total de			*Componentes en regresión*					
Tratamientos	A^1	A^2	B^1	B^2	A^1B^1	A^1B^2	A^2B^1	A^2B^2
$T_{00} = a_0b_0$	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
$T_{01} = a_0b_1$	-1	1	0	-2	0	2	0	-2
$T_{02} = a_0b_2$	-1	1	1	1	-1	-1	1	1
$T_{10} = a_1b_0$	0	-2	-1	1	0	0	2	-2
$T_{11} = a_1b_1$	0	-2	0	-2	0	0	0	4
$T_{12} = a_1b_2$	0	-2	1	1	0	0	-2	-2
$T_{20} = a_2b_0$	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$T_{21} = a_2b_1$	1	1	0	-2	0	-2	0	-2
$T_{22} = a_2b_2$	1	1	1	1	1	1	1	1

Otra forma de escribir la matriz es la siguiente:

$$\begin{bmatrix}[A^1]\\ [A^2]\\ [B^1]\\ [B^2]\\ [A^1B^1]\\ [A^1B^2]\\ [A^2B^1]\\ [A^2B^2]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0b_0\\ a_0b_1\\ a_0b_2\\ a_1b_0\\ a_1b_1\\ a_1b_2\\ a_2b_0\\ a_2b_1\\ a_2b_2\end{bmatrix}$$

Si los factores que intervienen en el factorial a tres o mas niveles son cuantitativos, el procedimiento descrito parece ser el que conduce a una interpretación concreta del experimento. Si interviene por ejemplo, un factor cuantitativo (A) y un factor cualitativo (B), un esquema de análisis sería:

	G. de L.
Efecto lineal de A: A^1	1
Efecto cuadrático de A: A^2	1
Efecto total de B: B	2
Interacción AB	4

Si hay interacción el esquema sería:

	G. de L.	
Efecto total de B		2
Efecto lineal de A a b_0 de B	1	
Efecto lineal de A a b_1 de B	1	
Efecto lineal de A a b_2 de B	1	
Efecto cuadrático de A a b_0 de B	1	
Efecto cuadrático de A a b_1 de B	1	
Efecto cuadrático de A a b_2 de B	1	

EXPERIMENTOS FACTORIALES 2^k

En el siguiente cuadro se presentan los resultados de un ensayo realizado en *Fertilización N, P, K en maíz* con un arreglo de tratamiento factorial 2^3 en un diseño de experimento completamente aleatorizado.

TRATAMIENTOS

(1)	a	b	ab	c	ac	bc	abc
10	16	27	23	16	16	25	28
18	19	17	18	25	16	23	24
8	16	16	28	22	19	30	20
—	—	—	—	—	—	—	—
36	51	60	69	63	51	78	72

Modelo Lineal Aditivo

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \qquad (8.43)$$

Y_{ijkl} = observación l-esima del i-ésimo nivel del factor A, j-ésimo nivel del factor B y k-ésimo nivel del factor C.
μ = media general
α_i = efecto del i-ésimo nivel del factor A
β_j = efecto del j-ésimo nivel del factor B
$(\alpha\beta)_{ij}$ = efecto de la interacción de primer orden del i-ésimo nivel del factor A con el j-ésimo nivel del factor B
$(\alpha\gamma)_{ik}$ = efecto de la interacción de primer orden del i-ésimo nivel del factor A con el k-ésimo nivel del factor C
$(\beta\gamma)_{jk}$ = efecto de la interacción de primer orden del j-ésimo nivel del factor B con el k-ésimo nivel del factor C
$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ = efecto de la interacción de segundo orden del i-ésimo nivel del factor A j-ésimo nivel del factor B con el k-ésimo nivel del factor C
ε_{ijkl} = error experimental

Supuestos del Modelo:

Modelo I (fijo)

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

$$\sum_{k=1}^{c} \gamma_k = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(\alpha\gamma)_{ik} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\beta\gamma)_{jk} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim NID(0,\sigma_{\varepsilon}^{2})$$

Modelo II (Aleatorio)

$$\alpha_i \sim NID(0,\sigma_{\alpha}^{2})$$

$$\beta_j \sim NID(0,\sigma_{\beta}^{2})$$

$$\gamma_k \sim NID(0,\sigma_{\gamma}^{2})$$

$$(\alpha\beta)_{ij} \sim NID(0,\sigma_{\alpha\beta}^{2})$$

$$(\alpha\gamma)_{ik} \sim NID(0,\sigma_{\alpha\gamma}^{2})$$

$$(\beta\gamma)_{jk} \sim NID(0,\sigma_{\beta\gamma}^{2})$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{ijk} \sim NID(0,\sigma_{\alpha\beta\gamma}^{2})$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim NID(0,\sigma_{\varepsilon}^{2})$$

Hipótesis:

Modelo I

Ho: $\alpha_i = 0$
Ha: $\alpha_i \neq 0$

Ho: $(\alpha\beta)_{ij} = 0$
Ha: $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

Ho: $(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$
Ha: $(\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$

Ho: $\beta_j = 0$
Ha: $\beta_j \neq 0$

Ho: $(\alpha\gamma)_{ik} = 0$
Ha: $(\alpha\gamma)_{ik} \neq 0$

Ho: $\gamma_k = 0$
Ha: $\gamma_k \neq 0$

Ho: $(\beta\gamma)_{jk} = 0$
Ha: $(\beta\gamma)_{jk} \neq 0$

Modelo II

Ho: $\sigma^2_\alpha = 0$

Ha: $\sigma^2_\alpha \neq 0$

Ho: $\sigma^2_{\alpha\beta} = 0$

Ha: $\sigma^2_{\alpha\beta} \neq 0$

Ho: $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} = 0$

Ha: $\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\beta = 0$

Ha: $\sigma^2_\beta \neq 0$

Ho: $\sigma^2_{\alpha\gamma} = 0$

Ha: $\sigma^2_{\alpha\beta} \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\gamma = 0$

Ha: $\sigma^2_\gamma \neq 0$

Ho: $\sigma^2_{\beta\gamma} = 0$

Ha: $\sigma^2_{\beta\gamma} \neq 0$

El esquema de Anavar está dado en la Tabla 8.2 dada a continuación:

Tabla 8.2. Esquema de Analisis de Varianza Para el Experimento Factorial 2^3

F. de V.	*G. de L.*	*Suma de Cuadrados*	*Esperanzas de los Cuadrados Medios (Modelo I)*	*Esperanzas de los Cuadrados Medios (Modelo II)*
A	a-1	$\sum_{i=1}^{a}(a_i)^2/rbc - F.C.$	$\sigma_\varepsilon^2 + bcr\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2/(a-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + rc\,\sigma_{\alpha\beta}^2 + rb\,\sigma_{\alpha\gamma}^2 + rbc\,\sigma_\alpha^2$
B	b-1	$\sum_{j=1}^{b}(b_j)^2/rac - F.C.$	$\sigma_\varepsilon^2 + acr\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2/(b-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + r\,c\sigma_{\alpha\beta}^2 + ra\,\sigma_{\beta\gamma}^2 + rac\,\sigma_\beta^2$
C	c-1	$\sum_{k=1}^{c}(c_k)^2/rab - F.C.$	$\sigma_\varepsilon^2 + abr\sum_{k=1}^{c}\gamma_k^2/(c-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + r\,b\sigma_{\alpha\gamma}^2 + ra\,\sigma_{\beta\gamma}^2 + ra\,b\sigma_{\Gamma}^2$
AB	(a-1)(c-1)	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(a_ib_j)^2/rc - F.C. - SCA - SCB$	$\sigma_\varepsilon^2 + cr\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2/(a-1)(b-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + r\,c\sigma_{\alpha\beta}^2$
AC	(b-1)(c-1)	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(a_ic_k)^2/rb - F.C. - SCA - SCC$	$\sigma_\varepsilon^2 + br\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(\alpha\gamma)_{ik}^2/(a-1)(c-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + r\,b\sigma_{\alpha\gamma}^2$
BC	(b-1)(c-1)	$\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(b_jc_k)^2/ra - F.C. - SCB - SCC$	$\sigma_\varepsilon^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\beta\gamma)_{jk}^2/(b-1)(c-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + ra\,\sigma_{\beta\gamma}^2$
ABC	(a-1)(b-1)(c-1)	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(a_ib_jc_k)^2/r - F.C. - SCA - SCB - SCC - SCAB - SCAC - SCBC$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(\frac{(\alpha\beta\gamma)_{ijk}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}\right)$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
EE	(abc-1)(r-1)	Diferencia	σ_ε^2	σ_ε^2
Total	abcr-1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}Y_{ijkl}^2 - F.C.$		

$$F.C. = (GranTotal)^2/abcr$$

Desarrollo del Ejemplo

Sumas de Cuadrados

Suma de Cuadrados de Tratamientos:

$$SCTrat = \frac{36^2 + 51^2 + ... + 78^2 + 72^2}{3} - \frac{(480)^2}{24}$$

$$SCTrat = 10.032 - 9.600 = 432$$

Suma de Cuadrados de los Efectos Principales. Cuadros de doble entrada

	b_o	b_1	Total
a_o	99	138	237
a_1	102	141	243
Total	201	279	480

	c_o	c_1	Total
a_o	96	141	237
a_1	120	123	243
Total	216	264	480

	c_o	c_1	Total
b_o	87	114	201
b_1	129	150	279
Total	216	264	480

Suma de Cuadrados de A

$$SCA = \frac{237^2 + 243^2}{3x2x2} - \frac{480^2}{24} = 9601.5 - 9600 = 1.5$$

Suma de Cuadrados de B

$$SCB = \frac{201^2 + 279^2}{3x2x2} - \frac{480^2}{24} = 9853.5 - 9600 = 253.5$$

Suma de Cuadrados de C

$$SCC = \frac{216^2 + 264^2}{3x2x2} - \frac{480^2}{24} = 9696 - 9600 = 96$$

Suma de Cuadrados de las Interacciones

Suma de Cuadrados AB

$$SCAB = \frac{99^2 + 138^2 + 102^2 + 123^2}{3x2} - \frac{480^2}{24} - 1.5 - 253.5 = 9855 - 9600 - 1.5 - 253.5 = 0$$

Suma de Cuadrados AC

$$SCAC = \frac{96^2 + 141^2 + 120^2 + 123^2}{3x2} - \frac{480^2}{24} - 1.5 - 96 = 9771 - 9600 - 1.5 - 96 = 73.5$$

Suma de Cuadrados BC

$$SCBC = \frac{87^2 + 114^2 + 129^2 + 150^2}{3x2} - \frac{480^2}{24} - 253.5 - 96 = 9951 - 9600 - 253.5 - 96 = 1.5$$

Suma de Cuadrados ABC

$$SCABC = \frac{36^2 + 51^2 + \ldots + 78^2 + 72^2}{3} - \frac{480^2}{24} - 1.5 - 253.5 - 96 - 0 - 73.5 - 1.5 = 6.0$$

Suma de Cuadrados Total

$$SCTotal = 10^2 + 18^2 + 8^2 + \ldots + 24^2 + 20^2 - F.C = 724.0$$

Suma de Cuadrados del Error Experimental

$$SCEE = SCTotal - SCTrat = 724 - 432 = 292$$

Cuadrados Medios o Varianzas

Cuadrados Medios de Tratamiento

$$CMTrat = \frac{SCTrat}{t-1} = \frac{432}{7} = 61.71$$

Cuadrados Medios para Efectos Principales

Cuadrado Medio para A

$$CMA = \frac{\text{SCA}}{\text{a}-1} = \frac{1.5}{1} = 1.5$$

Cuadrado Medio para B

$$CMB = \frac{SCB}{b-1} = \frac{253.5}{1} = 253.5$$

Cuadrado Medio para C

$$CMC = \frac{SCC}{c-1} = \frac{96.0}{1} = 96$$

Cuadrados Medios para Interacciones

Cuadrado Medio para AB

$$CMAB = \frac{\text{SCAB}}{(\text{a}-1)(\text{b}-1)} = 0$$

Cuadrado Medio para AC

$$CMAC = \frac{\text{SCAC}}{(\text{a}-1)(\text{c}-1)} = \frac{73.5}{1} = 73.5$$

Cuadrado Medio para BC

$$CMBC = \frac{\text{SCBC}}{(\text{b}-1)(\text{c}-1)} = 1.5$$

Cuadrado Medio para ABC

$$CMABC = \frac{\text{SCABC}}{(a-1)(b-1)(c-1)} = 6.0$$

Cuadrado Medio para el Error Experimental

$$CMEE = \frac{\text{SCEE}}{(abc-1)(r-1)} = \frac{292}{16} = 18.25$$

Análisis de Varianza

ANAVAR (MODELO FIJO)

F. de V.	G. de L.	SC	CM	F	F(5%)	F(1%)
Trat	7	432.0	61.71	3.38**	2.66	4.03
A	1	1.5	1.5	0.08 N.S.	4.49	8.53
B	1	253.5	253.5	13.89**		
C	1	96.0	96.0	5.26*		
AB	1	0.0	0.0	0.0N.S.		
AC	1	73.5	73.5	4.02N.S.		
BC	1	1.5	1.5	0.08N.S.		
ABC	1	6.0	6.0	0.33N.S.		
EE	16	292.0	18.25			
Total	23	724.0				

ANAVAR(MODELO ALEATORIO)

F.de V.	G. de L.	CM	F
Trat	7	61.71	
A	1	1.50	
B	1	253.50	
C	1	96.00	
AB	1	0.00	0.00
AC	1	73.50	12.25**
BC	1	1.50	0.25
ABC	1	6.00	0.32
EE	16	18.25	
Total	23		

Análisis de Varianza calculado a través de matrices ortogonales

Contrastes ortogonales y totales de tratamiento

	36	51	60	69	63	51	78	72	
	(1)	a	b	c	ab	ac	bc	abc	
μ	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	1
A	- 1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	a
B	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	b
C	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	c
AB	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	ab
AC	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	ac
BC	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	bc
ABC	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	abc

Sumas de Cuadrados: La contribución de cada efecto a la suma de cuadrados de tratamiento viene dada por:

Suma de Cuadrados de efectos principales

$$SCA = \frac{(-36+51-60-69+63+51-78+72)^2}{8\,x\,3} = \frac{6^2}{24} = 1.5$$

$$SCB = \frac{(-36-51+60-69+63-51+78+72)^2}{8\,x\,3} = \frac{72^2}{24} = 253.5$$

$$SCC = \frac{(-36-51-60+69-63+51+78+72)^2}{8x3} = \frac{48^2}{24} = 96.0$$

Suma de Cuadrados de Interacciones

$$SCAB = \frac{(+36-51-60+69+63-51-78+72)^2}{8x3} = 0.0$$

$$SCAC = \frac{(+36-51+60-69-63+51-78+72)^2}{8x3} = \frac{42^2}{24} = 73.5$$

$$SCBC = \frac{(+36+51-60-69-63-51+78+72)^2}{8x3} = \frac{(-6)^2}{24} = 1.5$$

$$SCABC = \frac{(-36+51+60+69-63-51-78+72)^2}{8x3} = \frac{12^2}{24} = 6.0$$

Suma de Cuadrados de Tratamiento

SCTrat = 1.5 + 253.5 + 96.0 + 0.0 + 73.5 + 1.5 + 6.0 = 432

El resto del procedimiento es igual al que aparece en las páginas anteriores, incluyendo el Análisis de Varianza.

Interpretación

Modelo Fijo

Este es el modelo que se utiliza en la mayoría de los experimentos agrícolas cuando no se está repitiendo el experimento ni en el tiempo ni en el espacio.

De acuerdo a los resultados del Análisis de Varianza en los que resultaron significativos los efectos de los factores B y C; es decir, Fósforo y Potasio, se puede concluir que el cultivo de maíz bajo estas condiciones de suelo y clima responde positivamente a la fertilización con Fósforo y Potasio. Como se trata de la aplicación o no del nutriente (ensayo exploratorio) con sólo observar cual de las dos medias es mayor, es suficiente para determinar el mejor tratamiento.

Modelo Aleatorio

Al observar los cuadrados medios esperados se nota que no existen denominadores apropiados para la prueba de significación de F para los factores independientes (N, P, K) por consiguiente se tendrían que realizar pruebas de F aproximadas.

Para el caso de las interacciones de primer orden el denominador apropiado para la prueba de F es la interacción de segundo orden ABC y para esta interacción el denominador es el Error Experimental, al realizar las pruebas de F solamente la interacción AC es significativa; es decir, para este modelo existe significación para el efecto interactuante de Nitrógeno y Potasio.

Puede apreciarse que la interpretación fue completamente diferente a la del Modelo Fijo. Sin embargo es de notar que **se utilizó el modelo aleatorio solamente con fines didácticos, ya que para este tipo de experimentos no tiene ninguna justificación considerar aleatorios los factores bajo estudio.**

EJERCICIOS

Con un conjunto de datos afín a su área de investigación, responda las siguientes preguntas:

- Establezca el modelo lineal aditivo describiendo cada uno de los términos del modelo y los subíndices presentes.

- Dé los supuestos del modelo.

- Establezca las hipótesis a probar.

- Escriba el cuadro de ANAVAR de acuerdo al modelo. Considere cuadrados medios esperados y los estadísticos de prueba.

- Realice el ANAVAR.

- Pruebe las hipótesis.

- Interprete los resultados.

EXPERIMENTOS FACTORIALES 3^K

En el siguiente cuadro se presentan los resultados de un ensayo realizado en ***Fertilización N, P, K en maíz*** con un arreglo de tratamiento factorial 3^2 en un diseño experimental bloques al azar.

TRATAMIENTOS

		a_2			a_1			a_0		
Bloques	b_2	b_1	b_0	b_2	b_1	b_0	b_2	b_1	b_0	Total
I	52	28	56	66	36	20	56	42	22	378
II	48	44	48	54	24	38	34	16	36	342
III	60	48	40	56	62	32	52	36	28	414
IV	40	48	16	48	46	22	34	26	26	306
Total	200	168	160	224	168	112	176	120	112	1440

Modelo Lineal Aditivo

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + ;(\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + \varepsilon_{ijkl} \qquad (8.44)$$

Y_{ijkl} = observación k-esima del i-ésimo nivel del factor A y j-ésimo nivel del factor B

μ = media general

α_i = efecto del i-ésimo nivel del factor A

β_j = efecto del j-ésimo nivel del factor B

γ_k = efecto del k-ésimo bloque

ε_{ijkl} = error experimental

Supuestos del Modelo:

Modelo I (fijo)

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$\gamma_k \sim NID(0, \sigma_\gamma^2)$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Modelo II (Aleatorio)

$$\alpha_i \sim NID(0, \sigma_\alpha^2)$$

$$\beta_j \sim NID(0, \sigma_\beta^2)$$

$$(\alpha\beta)_{ij} \sim NID(0, \sigma_{\alpha\beta}^2)$$

$$\gamma_k \sim NID(0, \sigma_\gamma^2)$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Hipótesis:

Modelo I

Ho: $\alpha_i = 0$

Ha: $\alpha_i \neq 0$

Ho: $\beta_j = 0$

Ha: $\beta_j \neq 0$

Ho: $(\alpha\beta)_{ij} = 0$

Ha: $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

Ho: $\sigma_\gamma^2 = 0$

Ha: $\sigma_\gamma^2 \neq 0$

Modelo II

Ho: $\sigma_\alpha^2 = 0$

Ha: $\sigma_\alpha^2 \neq 0$

Ho: $\sigma_\beta^2 = 0$

Ha: $\sigma_\beta^2 \neq 0$

Ho: $\sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$

Ha: $\sigma_{\alpha\beta}^2 \neq 0$

Ho: $\sigma_\gamma^2 = 0$

Ha: $\sigma_\gamma^2 \neq 0$

El esquema del Análisis de Varianza y las Esperanzas de los Cuadrados Medios se muestran en las Tablas 8.3 y 8.4 respectivamente.

Tabla 8.3. Esquema de análisis de varianza para el Experimento Factorial 3²

F. de V.	G. de L.	Suma de Cuadrados	CM
Bloques	r-1	$\sum_{k=1}^{r} \frac{Y_{..k}^2}{ab} - F.C.$	SCBloq/(r-1)
Tratamientos	t-1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{ij.}^2}{r} - F.C.$	SCTrat/(t-1)
A	a-1	$\sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i..}^2}{br} - F.C.$	SCA/(a-1)
B	b-1	$\sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{.j.}^2}{ar} - F.C.$	SCB/(b-1)
AB	(a-1)(b-1)	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{ij.}^2}{r} - F.C. - SCA - SCB$	SCAB/(a-1)(b1)
EE	(ab-1)(r-1)	SCTotal-SCTrat-SCBloq	SCEE/(ab-1)(r-1)
Total	abr-1	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} Y_{ijk}^2 - F.C.$ $F.C. = (GranTotal)^2 / abr$	

Tabla 8.4. Esperanzas de los Cuadrados Medios para el Factorial 3^2 para el caso de los Modelos Tipo I, II, III

	E(CM) Modelo I	Denominador	E(CM) Modelo II	Denominador
Bloque	$\sigma_\varepsilon^2 + ab\sigma_\gamma^2$	CMEE	$\sigma_\varepsilon^2 + ab\sigma_\gamma^2$	CMEE
A	$\sigma_\varepsilon^2 + rb\sum_{i=1}^{a} \frac{\alpha_i^2}{a-1}$	CMEE	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + rb\sigma_\alpha^2$	CMAB
B	$\sigma_\varepsilon^2 + ra\sum_{j=1}^{b} \frac{\beta_{ji}^2}{b-1}$	CMEE	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + ra\sigma_\beta^2$	CMAB
AB	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	CMEE	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2$	CMEE
Error	σ_ε^2		σ_ε^2	

	E(CM) Modelo III A fijo B aleatorio	Denominador	E(CM) Modelo III A aleatorio B fijo	Denominador
Bloque	$\sigma_\varepsilon^2 + ab\sigma_\gamma^2$	CMEE	$\sigma_\varepsilon^2 + ab\sigma_\gamma^2$	CMEE
A	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + rb\sum_{i=1}^{a} \frac{\alpha_i^2}{a-1}$	CMAB	$\sigma_\varepsilon^2 + rb\sigma_\alpha^2$	CMEE
Error(a)				
B	$\sigma_\varepsilon^2 + ra\sigma_\beta^2$	CMEE	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_\alpha^2 + ra\sum_{\beta}\sum_{i=1}^{b} \frac{\beta_j^2}{(b-1)}$	CMAB
AB	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2$	CMEE	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2$	CMEE
Error(b)	σ_ε^2		σ_ε^2	

Desarrollo del Ejemplo

Suma de Cuadrados

Suma de Cuadrados de Tratamientos:

$$\text{SCTrat} = \frac{200^2 + 168^2 + \ldots + 112^2}{4} - \frac{1440^2}{36}$$

$$\text{SCTrat} = \frac{242.688}{4} - 57.600 = 3072$$

Suma de Cuadrados de los Efectos Principales.
Cuadro de doble entrada

	b_2	b_1	b_o	Total
a_2	200	168	160	528
a_1	224	168	112	504
a_o	176	120	112	408
Total	600	456	384	1440

Suma de Cuadrados de A

$$SCA = \frac{528^2 + 504^2 + 408^2}{4x3} - \frac{1440^2}{36} = 672$$

Suma de Cuadrados de B

$$SCB = \frac{600^2 + 456^2 + 384^2}{4x3} - \frac{1440^2}{36} = 2.016$$

Suma de Cuadrados de la Interacción.

Suma de Cuadrados de AxB

$$SCAB = \frac{200^2 + 168^2 + \ldots + 120^2 + 112^2}{4} - F.C. - SCA - SCB = 384$$

Suma de Cuadrados de Bloque

$$SCBloq = \frac{378^2 + 342^2 + 414^2 + 306^2}{3x3} - \frac{1440^2}{36} = 720$$

Suma de Cuadrados Total

$$SCTotal = 52^2 + 28^2 + ... + 26^2 - \frac{1440^2}{36} = 6512$$

Suma de Cuadrados del Error Experimental

$$SCEE = SCTotal - Sctrat - SCBloq$$

$$SCEE = 6512 - 3072 - 720 = 2720$$

Cálculo de las sumas de cuadrados a través de los coeficientes ortogonales

	b_2	b_1	b_o		B_1			B_2	
a_2				1	0	-1	1	-2	1
a_1				1	0	-1	1	-2	1
a_o				1	0	-1	1	-2	1
		A_1			A_1B_1			A_1B_2	
	1	1	1	1	0	-1	1	-2	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	2	-1
		A_2			A_2B_1			A_2B_2	
	1	1	1	1	0	-1	1	-2	1
	-2	-2	-2	-2	0	2	-2	4	-2
	1	1	1	1	0	-1	1	-2	1

Suma de Cuadrados de A lineal

$$SCA_1 = \frac{(528-408)^2}{\left[1^2+1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2\right]x4} = \frac{120^2}{6x4} = 600$$

Suma de Cuadrados de A cuadrático

$$SCA_2 = \frac{(528+408-2x504)^2}{\left[1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+(-2)^2+(-2)^2\right]\ x4} = \frac{(936-1008)^2}{72} = 72$$

Suma de Cuadrados de B lineal

$$SCB_1 = \frac{(600-384)^2}{\left[1^2+1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2+1^2\right]x4} = \frac{216^2}{24} = 1.944$$

Suma de Cuadrados de B cuadrático

$$SCB_2 = \frac{[600+384-2x456]^2}{\left[1^2+1^2+1^2+(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2+1^2+1^2\right]x4} = \frac{(984-912)^2}{72} = 72$$

Suma de Cuadrados de la Interacción A lineal x B lineal

$$SCA_1B_1 = \frac{\left[(200+112)-(176+160)\right]^2}{\left[1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2\right]x4} = \frac{(-24)^2}{16} = 36$$

Suma de Cuadrados de la Interacción A lineal x B cuadrático

$$SCA_1B_2 = \frac{\left[(200+160+240)-(176+112+336)\right]^2}{\left[1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2+2^2+(-2)^2\right]x4} = \frac{(600-624)^2}{48} = 12$$

Suma de Cuadrados de la Interacción A cuadrático x B lineal

$$SCA_2B_1 = \frac{\left[(200+276+224)-(160+112+448)\right]^2}{\left[1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2+2^2+(-1)^2\right]\ x4} = 300$$

Suma de Cuadrados de la Interacción A cuadrático x B cuadrático

$$SCA_2B_2 = \frac{\left[(200+176+160+112+672)-(448+336+224+240)\right]^2}{\left[1^2+1^2+1^2+(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2+4^2\right]x4} = \frac{5184}{144} = 36$$

ANAVAR (Modelo Fijo)

F. de V.	G. de L.	SC	CM	F	Ftab(5%)	Ftab(1%)
Trat	8	3072	384	3,388	2,36	3,36
A	2	672	336	2,965	3,40	5,61
A_1	1	600	600	5,29**	4,26	7,82
A_2	1	72	72	0,635n.s.		
B	2	2016	1008	8,89**		
B_1	1	1944	1944	17,15**		
B_2	1	72	72	0,635n.s.		
AB	4	384	96	0,847n.s.		
A_1B_1	1	36	36	0,318n.s.		
A_1B_2	1	12	12	0,106n.s.		
A_2B_1	1	300	300	2,649n.s.		
A_2B_2	1	36	36	0,318n.s.		
Bloque	3	720	240	2,111	3,01	4,72
EE	24	2720	113,33			
Total	35	6512				

Interpretación

De acuerdo a los resultados del Análisis de Varianza se puede interpretar lo siguiente:

-. La significación de los tratamientos es indicativo de que existen diferencias estadísticamente significativas al nivel 0,01 entre las medias de los nueve tratamientos.

-. Existen diferencias estadísticamente significativas al 10% entre los rendimientos obtenidos con las distintas dosis de Nitrógeno utilizados.

-. El efecto de dichas dosis es lineal; es decir, se incrementa linealmente con el aumento de los niveles de Nitrógeno.

-. Existen diferencias estadísticamente significativas al 1% entre los niveles de Fósforo utilizados en el experimento.

-. El efecto de los niveles de Fósforo es lineal, se aumentan linealmente los rendimientos con los sucesivos incrementos de los niveles de Fósforo.

-. No existe interacción entre los dos factores, cada uno actua independientemente del otro factor.

-. No existen diferencias estadísticamente significativas al 5% entre los rendimientos obtenidos en los bloques. Lo que indicaría que los rendimientos del maíz obtenidos entre los mismos tratamientos en los distintos bloques no fueron tan diferentes como para hacer claramente eficiente el control local. Sin embargo, el valor de F fue de 2,11 significativo al 12% lo que indicaría cierto control local con el bloqueo.

En conclusión; como la respuesta tanto del Nitrógeno como del Fósforo es lineal , los mejores rendimientos se obtienen con la máxima dosis utilizada de los dos factores objeto de estudio.

EJERCICIOS

Con un conjunto de datos afín a su área de investigación, responda las siguientes preguntas:

- Establezca el modelo lineal aditivo describiendo cada uno de los términos del modelo y los subíndices presentes.

- Dé los supuestos del modelo.

- Establezca las hipótesis a probar.

- Escriba el cuadro de ANAVAR de acuerdo al modelo. Considere cuadrados medios esperados y los estadísticos de prueba.

- Realice el ANAVAR.

- Pruebe las hipótesis.

- Interprete los resultados.

Capítulo 9

REGLAS PARA LA ESPERANZA DE LOS CUADRADOS MEDIOS

Los Cuadrados Medios juegan un papel sumamente importante en el análisis de varianza para probar la hipótesis nula. El conocimiento de la esperanza de los cuadrados medios (E.C.M.) en el análisis de varianza es lo que conduce al investigador a realizar la prueba de la hipótesis nula con el estadístico apropiado. Las reglas para su realización se enumeraran a continuación:

Regla 1. Cada efecto tiene su componente de varianza (efecto aleatorio) o un factor fijo (efecto fijo) asociado a él. Si una interacción contiene por lo menos un efecto aleatorio, la interacción es declarada aleatoria. Un componente de varianza tiene letras griegas que identifican un efecto aleatorio particular. Por ejemplo, un modelo mixto con factor A fijo y factor B aleatorio el componente de varianza para B es σ_{β}^{2} y el componente de varianza para AB es $\alpha)^{2}_{\tau\beta}$ El efecto fijo será siempre representado por la sumatoria ($\sum$) de los componentes del modelo asociado con ese factor, dividido por sus grados de libertad. En el ejemplo, el efecto de A es

$$\sum_{i=1}^{a} \frac{\tau_i^2}{a-1} \qquad (9.1)$$

Regla 2. Cuadrados medios esperados. Para obtener los resultados medios esperados, preparar la siguiente tabla:

a) Una fila por cada componente del modelo (Cuadrado Medio) y una columna por cada subíndice; sobre cada subíndice escribir el número de niveles del factor asociado con el subíndice y si el factor es fijo escribir una F o si es aleatorio escribir una R. Las repeticiones o replicaciones son siempre consideradas como aleatorias.

b) En la última fila, , escriba "1" si uno de los subíndices (muertos) en el componente de la fila corresponde al subíndice de la columna. Por ejemplo;

Factor	F a i	F b j	R r k
τ_i			
β_j			
$(\tau\beta)_{ij}$			
$\varepsilon_{ij(k)}$	1	1	1

c) En cada fila, si cualquiera de los subíndices en el componente de la fila corresponde al subíndice de la columna, se escribe cero en la columna si es encabezada por un factor fijo y 1 si la columna es encabezada por un factor aleatorio.

Factor	F a i	F b j	R r k
τ_i	0		
β_j		0	
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	
$\varepsilon_{ij(k)}$	1	1	1

d) En cada una de las posiciones vacías de la fila escriba el número de niveles indicados en el encabezamiento de la columna.

Factor	F a i	F b j	R r k
τ_i	0	b	r
β_j	a	0	r
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	r
$\varepsilon_{ij(k)}$	1	1	1

e) Para obtener el cuadrado medio esperado (ECM) para cualquier componente del modelo, primero cubra todas las columnas encabezadas por subíndices presentes (vivos) en ese componente, en cada fila que contiene por lo menos el mismo subíndice como los del componente a ser considerado, tomar el producto de los números visibles y multiplicar por el factor apropiado fijo o aleatorio (Regla 1). La suma de estas cantidades es la ECM del componente del modelo a ser considerado; a fin de encontrar, por ejemplo, la ECM(A) tome la columna i del cuadro.

El producto de los números visibles en las filas que contienen el subíndice 1 son:

br en la fila 1   0 en la fila 3   1 en la fila 4

Entonces la ECM(A) será

$$ECM(A) = \sigma^2 + \text{br} \sum_{i=1}^{a} \tau_i^{\,2} / (a - 1) \qquad (9.2)$$

EJEMPLOS

a) En el caso de dos factores en modelo fijo:

Factor	F a i	F b j	R r k	ECM
τ_i	0	b	r	$\sigma^2 + br \sum_{i=1}^{a} \tau_i^2 / (a-1)$
β_j	a	0	r	$\sigma^2 + ar \sum_{j=1}^{b} \beta_j^2 / (b-1)$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	r	$\sigma^2 + r \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij}^2 / (a-1)(b-1)$
$\varepsilon_{ij(k)}$	1	1	1	σ^2

b) En el caso de dos factores en modelo aleatorio:

Factor	R a i	R b j	R r k	ECM
τ_i	1	b	r	$\sigma^2 + r\,\sigma^2_{\tau\beta} + br\,\sigma^2_{\tau}$
β_j	a	1	r	$\sigma^2 + r\,\sigma^2_{\tau\beta} + ar\,\sigma^2_{\beta}$
$(\tau\beta)_{ij}$	1	1	r	$\sigma^2 + r\,\sigma^2_{\tau\beta}$
$\varepsilon_{ij(k)}$	1	1	1	σ^2

c) En el caso de dos factores en modelo mixto:

Factor	F a i	R b j	R r k	ECM
τ_i	0	b	r	$\sigma^2 + r\,\sigma^2_{\tau\beta} + br \sum_{i=1}^{a} \tau_i^{\,2} / (a-1)$
β_j	a	1	r	$\sigma^2 + ar\,\sigma^2_{\beta}$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	1	r	$\sigma^2 + r\,\sigma^2_{\tau\beta}$
$\varepsilon_{ij(k)}$	1	1	1	σ^2

A manera de ejercicio, considere un experimento factorial de tres factores con **a** niveles del factor A, **b** niveles del factor B y **c** niveles del factor C y r repeticiones.

- asuma modelo fijo
- asuma modelo aleatorio
- asuma modelo mixto con A y B fijos y C aleatorio.

El modelo lineal es:

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\tau)_{ik} + (\beta\tau)_{jk} + (\alpha\beta\tau)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \quad (9.3)$$

Observe que ε_{ijkl} es la interacción de tratamientos simples (todas las combinaciones posibles) por repeticiones. Utilice las reglas dadas para las ECM y discuta la prueba de la hipótesis nula.

Note que en los modelos mixtos las interacciones que contienen factores fijos y aleatorios tendrán además los coeficientes dados por las reglas estudiadas para las varianzas, el coeficiente del factor fijo. Por ejemplo, en el caso planteado, la interacción AC, BC y ABC tendrán como ECM:

$$ECM(AC) = \sigma^2 + br\frac{a}{a-1}\sigma^2_{\alpha\tau} \quad (9.4)$$

$$ECM(BC) = \sigma^2 + ar\frac{b}{b-1}\sigma^2_{\beta\tau} \quad (9.5)$$

$$ECM(ABC) = \sigma^2 + r\frac{a}{a-1}\frac{b}{b-1}\sigma^2_{\alpha\beta\tau} \quad (9.6)$$

Capítulo 10

EXPERIMENTOS FACTORIALES CONFUNDIDOS

Introducción

El investigador agrícola puede estar interesado en estudiar varios factores simultáneamente, esto se hace a través de los experimentos factoriales estudiados en el capítulo anterior. Sin embargo a medida que se incrementa el número de factores y niveles de cada factor, aumenta simultáneamente el número de combinaciones de tratamientos a experimentar. Bajo esta situación el hecho de colocar los tratamientos en bloques completos al azar, puede disminuir la eficiencia de las estimaciones, al tener en el experimento una mayor heterogeneidad en el material experimental. Se puede recurrir al uso de bloques incompletos, en otras palabras, utilizar bloques que tengan solamente una parte del conjunto total de tratamientos.

Esta solución presenta dos consecuencias:

* Los bloques incompletos controlan la heterogeneidad intrabloques.
* El uso de bloques incompletos trae consigo una confusión de efectos que se debe estudiar con detenimiento.

SISTEMAS CONFUNDIDOS

Para diseñar un experimento en el cual el número de tratamientos que va a ser colocado en un bloque es menor que el número total de combinaciones de tratamientos, el experimentador debe decidir primero cuales son los efectos que va a confundir. Si hay sólo una interacción en el experimento y decide confundir esta interacción con bloques, el problema es simplemente decidir cuales combinaciones de tratamientos ubicar en cada bloque. Una forma de hacer esto, en el 2^k, es colocar en un bloque aquellas combinaciones de tratamientos con un signo (+) en el efecto a ser confundido y aquellas con signo (-) en el otro bloque. Cuando el número de tratamientos y de bloques aumenta, es necesario aplicar un

método más general. Primero, se define un contraste de definición. Esta es simplemente una expresión que establece cuales efectos van a ser confundidos con bloques.

Un ejemplo sencillo constituye el 2^2 para confundir AB, se escribe entonces AB como el Contraste de Definición. Una vez definido el contraste, existen varios métodos para determinar cuales combinaciones de tratamientos se ubican en cada bloque. Un método consiste en ubicar en un bloque las combinaciones de tratamientos que tienen signo positivo en AB y en el otro aquellas que tienen signo negativo.

Otro método es considerar cada combinación de tratamientos. Aquellas que tienen un número par de letras en común con las letras del efecto en el contraste de definición van en un bloque. Las que tienen un número impar de letras en común con el contraste de definición van en el otro bloque. Aquí (1) no tiene ninguna letra en común con el contraste de definición; es decir tiene cero letras en común, lo cual se considera como un número par; **a** tiene una letra en común con AB, es decir un número impar; **b** también tiene una letra en común con AB y **ab** tiene dos letras en común con AB. Por lo tanto quedarían dos bloques, en uno se incluyen los tratamientos **(1)** y **ab** y en el otro bloque los tratamientos **a** y **b.**

Una desventaja de estos dos métodos es que ellos sólo sirven para factoriales 2^k. Un método más general se atribuye a Kemptorne y se explicará más adelante en detalle.

EXPERIMENTOS FACTORIALES 2^3

Supongamos que se desean ensayar tres factores, digamos A, B y C, cada uno a dos niveles, y se aplica un factorial 2^3, confundido en r réplicas.

Réplica I			Réplica r	
Bloque 1	Bloque 2	...	Bloque 1	Bloque 2
ac	a	...	(1)	c
(1)	c	...	ac	b
ab	abc	...	bc	abc
bc	b	...	ab	a

El Anavar correspondiente para un factorial completamente confundido 2^3 sería:

ANAVAR

F. de V.	G. de L.
Bloques	2r-1
A	1
B	1
AB	1
C	1
AC	1
BC	1
Error	6(r-1)
Total	8r-1

Con bloques de cuatro unidades experimentales, la varianza de estimación de los efectos factoriales estimables es:

$$\sigma^2 / 2r \qquad (10.1)$$

Si el experimento se hubiese realizado en bloques completos al azar, todos los efectos factoriales habrían sido estimables y la varianza de estimación de cualquiera de ellos habría sido:

$$(\sigma^2)' / 2r \qquad (10.2)$$

Supuestamente $(\sigma^2)' > \sigma^2$. Entonces la eficiencia relativa de estimación en bloques incompletos con respecto al diseño en bloques completos es:

$$\left[(\sigma^2)' / 2r \right] / \left[\sigma^2 / 2r \right] = (\sigma^2)' / \sigma^2 > 1 \qquad (10.3)$$

COMPOSICION DE LOS BLOQUES BAJO DETERMINADO ESQUEMA DE CONFUSION

Existen varias maneras de determinar la composición de los bloques 2^k, sin embargo, el método general es el de Kempthorne explicado más adelante y ejemplificado para factoriales 3^k.

Esquemas típicos de confusión 2^k

2^3 en bloques de 4 unidades: cualquier efecto o interacción
en bloques de 2 unidades: i) A, B, AB
ii) A, B, ABC
iii) AB, BC, AC

2^4 en bloques de 8 unidades: cualquier efecto o interacción
en bloques de 4 unidades: i) A, B, AB
ii) A, BC, ABC
iii) A, BCD, ABCD
iv) AB, BC, AC
v) AB, CD, ABCD
vi) ABC, ACD, AD
en bloques de 2 unidades: i) A, B, AB, C, AC, BC, ABC
ii) A, B, AB, C, ACD, BCD, ABCD
iii) A, BC, ABC, BD, ABD, CD, ACD
iv) AB, AC, BC, AD, BD, CD, ABCD

La elección del esquema de confusión dependerá de las necesidades u objetivos del investigador. Sin embargo, puede verse que, por ejemplo, para un diseño 2^4 podría seleccionarse el esquema v) o el vi). Si se utilizaron el i), el ii) o el iii) se estarían confundiendo efectos principales; si, por otra parte, se eligiera el iv) se estarían confundiendo todas las interacciones de dos factores, mientras que en el v) y vi) sólo se confunden dos y una de ellas, respectivamente.

Fisher enunció un teorema que establece las características que debe llenar un experimento factorial de la familia 2^k, para que ninguna de las interacciones confundidas comprenda menos de tres factores.

Teorema de Fisher

Sea un experimento factorial 2^k en bloques de 2^m unidades experimentales ($k > m$), si $2^m > k$, se pueden encontrar arreglos en los que ninguna interacción confundida con bloques contenga menos de tres factores.

Ejemplo:

En un factorial 2^7 en bloques de 2^3 unidades experimentales, $k=7$ y $m=3$, de manera que $2^k = 2^3 = 8 > n = 7$. De acuerdo con el teorema de Fisher es posible construir un esquema de confusión tal que los efectos confundidos con bloques sean sólo interacciones de tres o más factores.

Los efectos o interacciones independientes que existen en un determinado esquema de confusión son llamados comúnmente generadores. En un experimento 2^k en bloques de 2^m unidades experimentales se tendrán $2^{k-m} = 2^q$ bloques, requiriéndose **q** generadores para definir el esquema de confusión.

Suponiendo que se cumple el teorema de Fisher, puede procederse como sigue:
* Si se requiere q generadores, deben escribirse las primeras k-q letras mayúsculas.
* Se construyen q interacciones cualesquiera con las letras anteriores.
* Con las q interacciones y los q efectos no considerados (las q letras no consideradas) combinados en pares se obtiene un conjunto de q generadores.

Ejemplo:

Consideremos un factorial 2^7 en bloques de 2^3 unidades experimentales (cumple con el teorema de Fisher).

Pueden construirse $2^{7-3} = 2^4$ bloques; de acuerdo con la notación utilizada q = 4 y k - q =3, o sea que con A, B y C se construyeron 4 interacciones AB, AC, BC y ABC, y como han quedado sin considerar los factores D, E, F y G, al combinarlos en pares podemos obtener diversos conjuntos de generadores. Por ejemplo: ABD, BCF y ABCG; o ABG, ACF, BCE y ABCD; o ABF, ACG, BCD y ABCE; o cualquier otra combinación.

Ejemplo:

Se ensayan las combinaciones de un factorial 2^3, para estudiar el efecto de Nitrógeno (n), Fósforo (p) y Potasio (k), sobre el rendimiento de un cultivo de maíz. La interacción NPK se ha confundido con bloques en las tres repeticiones. Se desea obtener el análisis de varianza del experimento, para el rendimiento del cultivo.

RepI
Bloque 1

pk 22,45	(1) 21,23	
np 28,49	nk 25,85	98.02

Bloque 2

n 28,12	k 20,64	
npk 22,14	p 20,05	90,95

RepII
Bloque 3

n 27,12	k 25,17	
npk 26,54	p 25,40	104,23

Bloque 4

np 23,59	nk 22,59	
(1) 23,36	pk 22,14	91,68

RepIII
Bloque 5

p 28,49	n 31,52	
npk 25,31	k 24,95	110,27

Bloque 6

nk 25,95	pk 24,13	
np 26,76	(1) 25,40	102,24

El esquema de confusión usado es el anteriormente descrito:

Bloque A (1, 4, 6) : (1) np nk pk
Bloque B (2, 3, 5) : n k p npk

Cálculo de los efectos totales

Totales de Tratamiento	
(1)	69,99
n	86,76
p	73,94
np	78,84
k	70,76
nk	74,39
pk	68,72
npk	73,99
G	597,39

Cálculo del factor de corrección

$$C = \frac{G^2}{2^3 r} = \frac{(597,39)^2}{24} = 14.869,7838$$

Cálculo de la suma de cuadrados total

$$SCTotal = \sum Y^2 - C = (22,45)^2 + \ldots + (25.40)^2 - 14.869,78 = 180,1867$$

Cálculo de la suma de cuadrados debido a bloques

$$SCB = \frac{\sum B_i^2}{4} - C = \frac{(98,02)^2 + \ldots + (102,24)^2}{4} - 14.869,78 = 70,5734$$

Esta suma de cuadrados debido a bloques puede dividirse en:

i) la suma de cuadrados debido a repeticiones

$$SCR = \frac{\sum R^2}{8} - C = \frac{(188,97)^2 + (195,91)^2 + (212,51)^2}{8} - 14.869,78 = 36,5773$$

ii) la suma de cuadrados debido a bloques dentro de repeticiones

$$SC(BDR) = \frac{\sum B^2}{4} - \frac{\sum R^2}{8} = 33,9961$$

El cálculo de las sumas de cuadrados debido a los efectos factoriales se realiza usando las ecuaciones 8.22 a 8.28.

$$SC(N) = \frac{(30,57)^2}{3 x 2^3} = 38,9385$$

$$SC(P) = \frac{(-6,41)^2}{3 x 2^3} = 1,7120$$

$$SC(NP) = \frac{(-10,23)^2}{3 x 2^3} = 4,3605$$

$$SC(K) = \frac{(-21,67)^2}{3 x 2^3} = 19,5662$$

$$SC(NK) = \frac{(-12,77)^2}{3 x 2^3} = 6,7947$$

$$SC(PK) = \frac{(1,53)^2}{3 x 2^3} = 0,0975$$

ANAVAR

F. de V.	G. de L.		SC	CM	Fc
Bloques	5		70,5734		
Rep.		2	36,5773		
BDR		3	33,9385		
N	1		38,9385	38,9385	12,25**
P	1		1,7120	1,7120	<1
NP	1		4,3605	4,3605	1,37
K	1		19,5662	19,5662	6,16*
NK	1		6,7949	6,7949	2,14
PK	1		0,0975	0,0975	<1
Error					
Intrabloque	12		38,1439	3,1787	
Total	23		180,1867		

De acuerdo con este análisis, el efecto del Nitrógeno es altamente significativo y el del Potasio significativo, sobre el rendimiento del maíz.

CONFUSION PARCIAL

Cuando se diseña un experimento factorial en bloques incompletos y se emplean dos o más repeticiones de los experimentos, no es necesario sacrificar totalmente la información de los efectos o interacciones que se confunden con bloques. Es posible que cada repetición se diseñe con un esquema diferente de confusión, pudiéndose así obtener información parcial sobre algunos efectos o interacciones de poco interés e información completa sobre el resto de los efectos factoriales, en los cuales está interesado el investigador.

Para entenderlo mejor, se ilustrará la explicación con un ejemplo. Si se analiza el esquema de la figura siguiente, la cual corresponde a un experimento factorial 2^3, en el cual se confunde AB en las repeticiones de tipo I, AC en las repeticiones del tipo II, BC en las repeticiones de tipo III, y ABC en las repeticiones de tipo

IV. Aunque las repeticiones de tipo I no permiten estimar AB a partir de comparaciones dentro de bloques, las repeticiones II, III y IV, si dan información sobre esta interacción. Se dice entonces que se tiene ¾ de información sobre AB, dado que de cuatro (4) unidades experimentales, tres (3) se utilizan para estimar AB. Lo mismo ocurre con las interacciones AC, BC y ABC, sobre las cuales también se obtiene las ¾ partes de la información.

ESQUEMA DE CONFUSION PARCIAL PARA UN FACTORIAL 2^3

Refiérase al capitulo 8, en la matriz de transformación ortogonal y agrupe los tratamientos con signos coincidentes, en la interacción respectiva.

Bloque 1	(1)	ab	c	abc		Bloque 3	(1)	b	ac	abc
Bloque 2	a	b	ac	bc		Bloque 4	a	ab	c	bc
Repetición tipo I						Repetición tipo II				
AB confundida con bloques						AC confundida con bloques				
Bloque 5	(1)	a	bc	abc		Bloque 7	(1)	ab	ac	bc
Bloque 6	b	ab	c	ac		Bloque 8	a	b	c	abc
Repetición tipo III						Repetición tipo IV				
BC confundida con bloques						ABC confundida con bloques				

En cambio, sobre los efectos principales A, B y C, se obtiene la información completa, ya que ninguno de ellos se confunde con bloques. Este esquema es de confusión parcial y da lugar a la partición del ANAVAR, representado en la tabla siguiente, suponiendo que se hacen r réplicas del esquema básico de la figura anterior:

F. de V.	G. de L.
Bloques	8r - 1
A	1
B	1
C	1
AB a partir de repeticiones Tipos II, III y IV	1'
AC a partir de repeticiones Tipos I, III y IV	1'
BC a partir de repeticiones Tipos I, II y IV	1'
ABC a partir de repeticiones Tipos I, II y III	1'
Error	24r - 7
Total	32r - 1

Si denotamos con los signos $(\sigma^2)'$ y σ^2, respectivamente, las varianzas intrabloques de los esquemas de bloques completos y en bloques de cuatro (4) unidades experimentales, podemos calcular la eficiencia de estimación del diseño en bloques incompletos, al diseño en bloques completos para los efectos principales , como $(\sigma^2)'/\sigma^2$, dado que en ambos diseños se obtiene información completa. Como en general $(\sigma^2)'/\sigma^2$ se tendrá mayor eficiencia de estimación con el diseño de bloques incompletos. Para las interacciones AB, AC, BC y ABC las varianzas de estimación son $(\sigma^2)'/8r$ y $\sigma^2/6r$ para el diseño en bloques incompletos y en bloques completos, respectivamente. Por consiguiente la eficiencia de estimación del diseño en bloques incompletos, con respecto al diseño en bloques completos está dada por:

$$\frac{(\sigma^2)'/8r}{\sigma^2/6r} = \frac{3(\sigma^2)'}{4\sigma^2} \qquad (10.4)$$

Entonces, si $\sigma^2 \leq 3(\sigma^2)'/4$, el diseño en bloques incompletos será más eficiente para estimar las interacciones y substancialmente más eficiente para estimar los efectos principales.

Ejemplo ilustrativo de un factorial con confusión parcial

Experimento simulado de dos factores A y B cada uno a dos niveles, que consta de dos réplicas de tres repeticiones completas. El esquema de confusión utilizado es el siguiente:

REPETICION I	:	A confundido
Bloque I (1,7)	:	(1) b
Bloque II (2,8)	:	ab a
REPETICION II	:	B confundido
Bloque I (3,10)	:	ab b
Bloque II (4,9)	:	(1) a
REPETICION III	:	AB confundido
Bloque I (5,11)	:	(1) ab
Bloque II (6,12)	:	a b

A confundido

Bloque			
1	b 50	(1) 58	$B_1 = 108$
2	ab 58	a 41	$B_2 = 99$

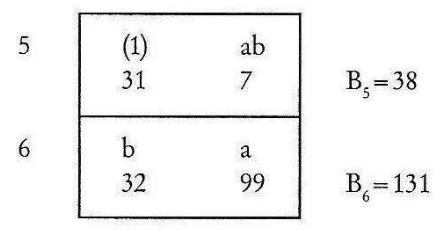
Repetición I R = 207

B confundido

Bloque			
3	ab 82	b 76	$B_3 = 158$
4	(1) 60	a 8	$B_4 = 68$

Repetición II R = 226

AB confundido



Bloque			
5	(1) 31	ab 7	$B_5 = 38$
6	b 32	a 99	$B_6 = 131$

Repetición III R = 169

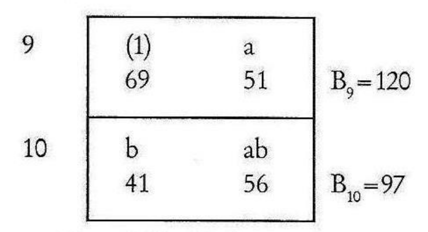
A confundido

Bloque			
7	(1) 26	b 86	$B_7 = 112$
8	ab 55	a 38	$B_8 = 93$

Repetición I R = 205

B confundido

Bloque



Repetición II R = 217

AB confundido

Bloque

Bloque			
11	(1) 83	ab 37	$B_{11}=120$
12	a 61	b 69	$B_{12}=130$

Repetición III R = 250

G = 1274

Cálculo del Factor de Corrección

$$C = \frac{G^2}{2^2 \times 6} = \frac{1274^2}{24} = 67628{,}17$$

Cálculo de la Suma de Cuadrados Total

$$SCTotal = \sum y^2 - C = 50^2 + \ldots + 69^2 - 67628{,}17 = 12739{,}83$$

Cálculo de la Suma de Cuadrados debido a Bloques Incompletos

$$SCB = \frac{\sum B_i^2}{2} - C = \frac{108^2 + ... + 130^2}{2} - C = 5351{,}83$$

Esta suma de cuadrados puede dividirse en:

1.- $$\text{SCRep} = \frac{\sum R^2}{4} - C = \frac{207^2 + ... + 250^2}{4} - C = 896{,}83$$

2.- $$\text{SC(BDR)} = \frac{\sum B_i^2}{2} - \frac{\sum R^2}{4} = 72980 - 68525 = 4425$$

Cálculo de los totales de tratamientos sobre:

i.- Repeticiones II y III
ii.- Repeticiones I y III
iii.- Repeticiones I y II

Para calcular los efectos medios y las contribuciones a las sumas de cuadrados A, B y AB

Tratamientos	Rep II y III	Rep I y III	Rep I y II
(1)	243	198	213
a	219	239	138
b	218	237	253
ab	182	157	251
Suma	862	831	855

Cálculo de las sumas totales de tratamientos

Repeticiones II y III

A_1 = suma de los totales de trat. a y ab = 219 + 182 = 401
A_0 = suma de los totales de trat. (1) y b = 243 + 218 = 461
$A_1 + A_o$ = Total parcial sobre repeticiones II y III = 862

Repeticiones I y III

B_1 = suma de los totales de trat. b y ab = 237 + 157 = 394
B_0 = suma de los totales de trat. (1) y a = 198 + 239 = 437
$B_1 + B_o$ = Total parcial sobre repeticiones I y III = 831

Repeticiones I y II

AB_1 = suma de los totales de trat.(1) y ab = 138 + 253 = 391
AB_0 = suma de los totales de trat. a y b = 213 + 251 = 464
$AB_1 + AB_o$ = Total parcial sobre repeticiones I y II = 855

Por lo tanto;

$$SC(A) = \frac{A_o^2 + A_1^2}{8} - \frac{(A_o + A_1)^2}{16} = 225$$

$$SC(B) = \frac{B_o^2 + B_1^2}{8} - \frac{(B_o + B_1)^2}{16} = 115,57$$

$$SC(AB) = \frac{AB_o^2 + AB_1^2}{8} - \frac{(AB_o + AB_1)^2}{16} = 333,07$$

ANALISIS DE LA VARIANZA (ANAVAR)

F. de V.	G. de L.	SC	CM	Fc
Rep.	5	896,83		
BDR	6	4455,00		
A (2/3	1	225,00	225,00	<1
B de	1	115,57	115,57	<1
AB inf.)	1	333,07	333,07	<1
Error Intrabloque	9	6714,36	746,07	
Total	23	12739,83		

Ejemplo ilustrativo de un experimento factorial confundido 2^3

En el siguiente cuadro se presentan los resultados de un ensayo realizado en Fertilización N.P.K. en maíz con un arreglo de tratamiento factorial 2^3 en un diseño experimental bloques al azar, con la interacción ABC completamente confundida.

Rep	abc	a	b	c	Total	Rep	ab	ac	bc	(1)	Total
I	30	16	24	19	89	I	28	16	27	8	79
II	23	16	28	16	83	II	18	25	16	10	69
III	25	19	20	16	80	III	23	22	17	18	80
Total Trat.	78	51	72	51	252		69	63	60	36	228

Modelo Lineal Aditivo

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + \rho_l + \varepsilon_{ijkl} \qquad (10.5)$$

Y_{ijkl} = observación l-ésima del i-ésimo nivel del factor A, j-ésimo nivel del factor B y k-ésimo nivel del factor C.
μ = media general
α_i = efecto del i-ésimo nivel del factor A
β_j = efecto del j-ésimo nivel del factor B
$(\alpha\beta)_{ij}$ = efecto de la interacción de primer orden del i-ésimo nivel del factor A con el j-ésimo nivel del factor B
$(\alpha\gamma)_{ik}$ = efecto de la interacción de primer orden del i-ésimo nivel del factor A con el k-ésimo nivel del factor C
$(\beta\gamma)_{jk}$ = efecto de la interacción de primer orden del j-ésimo nivel del factor B con el k-ésimo nivel del factor C
ρ_l = efecto de bloques
ε_{ijkl} = error experimental

Supuestos del Modelo:

Modelo I (fijo)

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

$$\sum_{k=1}^{c} \gamma_k = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c} (\alpha\gamma)_{ik} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} (\beta\gamma)_{jk} = 0$$

$\rho_l \sim \text{NID}(0, \sigma_\rho^2)$
$\varepsilon_{ijk} \sim \text{NID}(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Modelo II (Aleatorio)

$$\alpha_i \sim NID(0, \sigma^2_\alpha)$$
$$\beta_j \sim NID(0, \sigma^2_\beta)$$
$$\gamma_k \sim NID(0, \sigma^2_\gamma)$$
$$(\alpha\beta)_{ij} \sim NID(0, \sigma^2_{\alpha\beta})$$
$$(\alpha\gamma)_{ik} \sim NID(0, \sigma^2_{\alpha\gamma})$$
$$(\beta\gamma)_{jk} \sim NID(0, \sigma^2_{\beta\gamma})$$
$$\rho_l \sim NID(0, \sigma^2_\rho)$$
$$\varepsilon_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$$

Hipótesis:

Modelo I

Ho: $\alpha_i = 0$
Ha: $\alpha_i \neq 0$

Ho: $\beta_j = 0$
Ha: $\beta_j \neq 0$

Ho: $\gamma_k = 0$
Ha: $\gamma_k \neq 0$

Ho: $(\alpha\beta)_{ij} = 0$
Ha: $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

Ho: $(\alpha\gamma)_{ik} = 0$
Ha: $(\alpha\gamma)_{ik} \neq 0$

Ho: $(\beta\gamma)_{jk} = 0$
Ha: $(\beta\gamma)_{jk} \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\rho = 0$
Ha: $\sigma^2_\rho \neq 0$

Modelo II

Ho: $\sigma^2_\alpha = 0$
Ha: $\sigma^2_\alpha \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\beta = 0$
Ha: $\sigma^2_\beta \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\gamma = 0$
Ha: $\sigma^2_\gamma \neq 0$

Ho: $\sigma^2_{\alpha\beta} = 0$
Ha: $\sigma^2_{\alpha\beta} \neq 0$

Ho: $\sigma^2_{\alpha\gamma} = 0$
Ha: $\sigma^2_{\alpha\beta} \neq 0$

Ho: $\sigma^2_{\beta\gamma} = 0$
Ha: $\sigma^2_{\beta\gamma} \neq 0$

Ho: $\sigma^2_\rho = 0$
Ha: $\sigma^2_\rho \neq 0$

Esquema del Análisis de Varianza
ANAVAR

SIN CONFUSION		CONFUSION DE ABC		
F. de V	G. de L.	F. de V.	G. de L.	Componentes
Repeticiones	r - 1	Bloques	r - 1 = 5	2 repeticiones 1 interacción ABC 2 EE de ABC
Tratamiento	abc - 1	Tratamiento	abc - 2 = 6	3 trat.bloque A 3 trat.bloque B
Error	(r - 1)(abc - 1)	Error	(abc - 2)(r - 1) = 12	
Total	rabc - 1	Total	rabc - 1	

Desarrollo del Modelo

A continuación se presentará, a manera de comparación, el Análisis de Varianza sin confusión y posteriormente se presentará confundiendo la interacción ABC.

ANAVAR SIN CONFUSION

F. de V.	G. de L.	SC	CM	F	F(5%)	F(1%)
Repeticiones	2	16.0	8.0	0.41n.s.	6.51	3.74
Trat	7	432.0	61.71	3.13*	4.28	2.76
A	1	73.5	73.5			
B	1	253.5	253.5			
C	1	24.0	24.0			
AB	1	6.0	6.0			
AC	1	13.5	13.5			
BC	1	37.5	37.5			
ABC	1	24.0	24.0			
EE	14	276.0	19.71			
Total	23	724.0				

Los cálculos para la Suma de Cuadrados cuando se está confundiendo la interacción ABC serían:

Suma de Cuadrados de tratamiento

SCTrat sin confusión - SC efecto confundido (ABC)
SCTrat = 432 - 24.0
SCTrat = 408

Suma de Cuadrados de Bloque

$$SCBloque = \frac{89^2 + 83^2 + ... + 69^2 + 80^2}{4} - \frac{480^2}{24} = 53$$

Suma de Cuadrados Total

$$SCTotal = 30^2 + 16^2 + ... + 17^2 + 18^2 - \frac{480^2}{24} = 724$$

Suma de Cuadrados del Error Experimental

$$\text{SCEE} = \text{SCTotal} - \text{SCTrat} - \text{SCBloque} = 724 - 408 - 53 = 263$$

Los cálculos para los efectos principales e interacciones se realizan igual que los experimentos factoriales no confundidos. Los Cuadrados Medios o varianzas también se calculan en su forma convencional.

ANAVAR CONFUNDIENDO ABC

F. de V.	G. de L.	SC	CM	F	F(5%)	F(1%)
Bloques	5	53.0	10.6	0.48n.s.	2.11	5.06
Trat	6	408.0	68.0	3.10*	3.00	4.82
A	1	73.5	3.35n.s.			
B	1	253.5	253.5	11.57**		
C	1	24.0	24.0	1.09n.s.		
AB	1	6.0	6.0	0.27n.s.		
AC	1	13.5	13.5	0.61n.s.		
BC	1	37.5	37.5	1.71n.s.		
EE	12	263.0	21.9			
Total	23	724.0				

En este experimento se aceptan las hipótesis nulas: Ho: $\alpha_i = 0$, Ho: $\gamma_k = 0$, Ho: $(\alpha\beta)_{ij} = 0$, Ho: $(\alpha\gamma)_{ik} = 0$ y Ho: $(\beta\gamma)_{jk} = 0$, por lo tanto no existen diferencias significativas entre los efectos de N, K, NP, NK y PK.

Se rechaza la hipótesis nula Ho: $\beta_j = 0$ con una probabilidad del 1%, por lo tanto existe efecto independiente de P.

El efecto ABC se ha confundido porque en cada réplica el mismo contraste ABC se ha confundido con los bloques. La información sobre ABC se ha sacrificado en beneficio de bloques más pequeños, con lo cual se logra mayor homogeneidad y el Error Experimental será menor. En resumen, a expensas de ABC se gana un Error Experimental menor de forma que las otras comparaciones pueden hacerse en forma mas precisa.

EJERCICIOS

Con un ejercicio que se apropie;

- confunda totalmente la interacción ABC
- confunda en la repetición I - ABC, en la repetición II - BC y en la repetición III - AB

Responda las siguientes preguntas:
- Establezca el modelo lineal aditivo, describiendo cada uno de los términos del modelo y los subíndices presentes.
- Dé los supuestos del modelo.
- Escriba las hipótesis a probar.
- Describa el ANAVAR de acuerdo al modelo. Considere cuadrados medios esperados y el estadístico de prueba.
- Realice el ANAVAR.
- Pruebe las hipótesis.
- Interprete los resultados.

CONFUSION PARA EL DISEÑO FACTORIAL 3^k

Introducción

Aunque las razones básicas y los resultados de confundir factores a 3 niveles son los mismos que los vistos para factores de dos niveles, la técnica involucrada es mucho mas sofisticada. El diseño 3^k puede confundirse en 3p bloques incompletos donde $p < k$, así estos diseños pueden confundirse en 3 bloques, 9 bloques, etc.

El problema que ahora surge es el de la ubicación: ¿Cuáles tratamientos van a ir en el mismo bloque? La ubicación de los tratamientos en los bloques depende de cuales tratamientos van a ser sacrificados. Generalmente se desea conservar los efectos principales (A, B y C) en primer lugar y después las interacciones de primer orden (AB, AC, BC) por lo tanto se confunde en general la interacción ABC.

Supongamos que se desea confundir el diseño 3^k en 3 bloques incompletos. Estos bloques tienen dos grados de libertad y por lo tanto el número de grados de libertad confundidos con los bloques deben ser dos. Es de recordar que en la serie factorial 3^k cada efecto principal tiene dos grados de libertad.

ANAVAR

F. de V.	G. de L.
A	2
A_L	1
A_C	1
B	2
B_L	1
B_C	1
.	
.	
.	
AB	4
A_LB_L	1
A_LB_C	1
A_CB_L	1
A_CB_C	1
ABC	8
$A_LB_LC_L$	1
$A_LB_LC_C$	1
$A_LB_CC_L$	1
$A_LB_CC_C$	1
$A_CB_LC_L$	1
$A_CB_LC_C$	1
$A_CB_CC_L$	1
$A_CB_CC_C$	1

En el caso particular de un factorial 3^3 se tiene:

ESTRUCTURA DEL ANAVAR FACTORIAL 3^3

F. de V.	G. de L.
Bloques	r - 1
Tratamientos	$3^3 - 1$
A	2
B	2
AB	2
AB^2	2
C	2
AC	2
AC^2	2
BC	2
BC^2	2
ABC	2
ABC^2	2
AB^2C^2	2
Error	8(r - 1)
Total	3^3 r - 1

PROCEDIMIENTO GENERAL (Método de Kempthorne)

Construir el contraste de definición.

$$L = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k \qquad (10.6)$$

donde:
α_i = exponente del i-ésimo factor de una combinación de tratamientos que será confundida.
X_i = nivel i-ésimo en una combinación particular de tratamientos.

Para la serie 3^k:
$\alpha_i = 0, 1, 2$
$X_i = 0, 1, 2$

Las combinaciones de tratamientos del diseño 3^k se asignan a los bloques con base en el valor de L (mod 3). En esta forma, se pueden definir tres (3) bloques en forma única, porque L (mod 3) puede tomar los valores 0, 1 y 2. Las combinaciones de tratamientos que satisfacen L = 0 (mod 3) constituyen el bloque principal. Ejemplo: supóngase que se desea construir un diseño factorial 3^2 en tres bloques. Arbitrariamente, se elegirá AB^2 para confundir con bloques.

Contraste de definición

$$L = X_1 + 2X_2 \qquad (10.7)$$

$(0,0) : L = 1(0) + 2(0) = 0 \bmod 3$
$(0,1) : L = 1(0) + 2(1) = 2 \bmod 3$
$(0,2) : L = 1(0) + 2(2) = 1 \bmod 3$
$(1,0) : L = 1(1) + 2(0) = 1 \bmod 3$
$(1,1) : L = 1(1) + 2(1) = 0 \bmod 3$
$(1,2) : L = 1(1) + 2(2) = 2 \bmod 3$
$(2,0) : L = 1(2) + 2(0) = 2 \bmod 3$
$(2,1) : L = 1(2) + 2(1) = 1 \bmod 3$
$(2,2) : L = 1(2) + 2(2) = 0 \bmod 3$

Bloque 1	
0	0
1	1
2	2

Bloque 2	
0	2
1	0
2	1

Bloque 3	
0	1
1	2
2	0

En algunos casos experimentales es necesario confundir el diseño 3^k en nueve (9) bloques, por lo tanto se confundirán ocho (8) grados de libertad en los bloques. Para construir estos diseños, deben elegirse dos componentes de interacción y como resultado, dos más serán automáticamente confundidos, produciendo así los ocho (8) grados de libertad requeridos. Estos últimos corresponden a las interacciones generalizadas de los dos efectos elegidos originalmente.

En el sistema 3^k las interacciones generalizadas de dos efectos (por ejemplo A y B, producen las interacciones generalizadas AB y AB^2). Sus contrastes de definición son:

$$L_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k = U(\text{mod}3) \quad \text{donde } U = 0,1,2 \qquad (10.8)$$

$$L_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k = h(\text{mod}3) \quad \text{donde } h = 0,1,2 \qquad (10.9)$$

donde α_i y β_i son los elementos de la primera y segunda interacción generalizadas. Las combinaciones de tratamientos que tienen el mismo par de valores (L_1, L_2) se asignan al mismo bloque. El bloque principal consta de las combinaciones de tratamientos que satisfacen $(L_1 = L_2 = 0)$ mod 3.

Ejemplo: Diseño factorial 3^4 confundido en 9 bloques con 9 ensayos cada uno. Se elige confundir ABC y AB^2D^2. Sus interacciones generalizadas son:

$(ABC)(AB^2D^2) = A^2B^3CD^2 = (A^2B^3CD^2)^2 = AC^2D$

$(ABC)(AB^2D^2)^2 = A^3B^5CD^4 = (B^2CD)^2 = BC^2D^2$

también están confundidas con los bloques.

Contrastes de definición

$L_1 = X_1 + X_2 + X_3$ donde X_1, X_2, X_3 pueden tomar valores (0, 1, 2) (10.10)

$L_2 = X_1 + 2X_2 + 2X_4$ donde X_1, X_2, X_4 pueden tomar valores (0, 1, 2) (10.11)

Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3		Bloque 9
$(L_1, L_2) = (0,0)$	(0,1)	(2,2)	...	(0,2)
0000	0002	2000	...	0001
0122	0120	2122	...	0121
0211	0212	2211	...	0210
1021	1022	0021	...	1020
1110	1111	0111	...	1112
1201	1200	0202	...	1201
2012	2010	1012	...	2011
2101	2012	1101	...	2100
2220	2221	1220	...	2222

Diseño factorial 3^k confundido en 3^p bloques

El diseño factorial 3^k puede confundirse en 3^p bloques con 3^{k-p} observaciones cada uno y $p < k$. El procedimiento consiste en seleccionar p efectos independientes que serán confundidos con los bloques. Como resultado, automáticamente se confunden otros $(3^p - 2p - 1)/2$ efectos. Estos corresponden a las interacciones generalizadas de los efectos elegidos originalmente.

Ejemplo: Diseño 3^7 confundido en $3^3 = 27$ bloques. Como p = 3, deben seleccionarse 3 componentes de interacción independientes, y automáticamente confundir con otros $[3^3 - (2x3)-1]/2 = 10$ efectos. Supóngase que se eligen ABC^2DG, BCE^2F^2G y BDEFG. Usando estos efectos pueden construirse contrastes de definición y generarse los 27 bloques usando los métodos antes descritos. Los otros diéz (10) efectos que se confunden con bloques son:

$$(ABC^2DG)(BCE^2F^2G) = AB^2C^3DE^2F^2G^2 = AB^2DE^2F^2G^2 (mod3)$$
$$(ABC^2DG)(BCE^2F^2G)^2 = AB^3C^4DE^4F^4G^3 = ACDEF\ (mod\ 3)$$

.

.

.

$$(ABC^2DG)(BCE^2F^2G)(BDEFG)^2 = AB^4C^3D^3E^4F^4G^4 = ABEFG\ (mod\ 3)$$

Ejemplo Ilustrativo: Factorial 3^2 con bloques de tres unidades experimentales y un esquema de confusión parcial. Se ensayan dos factores A yB con dos réplicas de un esquema básico de dos (2) repeticiones completas.

Repetición I : se construyeron los bloques confundiendo AB.

Repetición II : se confundió el componente AB^2 de la interacción.

Bloque			
1	(0,2) 19	(2,0) 47	(1,1) 28
2	(1,0) 84	(0,1) 3	(2,2) 35
3	(2,1) 23	(1,2) 82	(0,0) 8

Repetición Ia:
AB confundido

Bloque			
4	(2,2) 34	(0,0) 72	(1,1) 41
5	(2,0) 33	(0,1) 91	(1,2) 77
6	(2,1) 46	(0,2) 13	(1,0) 19

Repetición IIa:
AB^2 confundido

Bloque			
7	(1,1) 65	(0,2) 99	(2,1) 20
8	(2,2) 30	(0,1) 72	(1,0) 4
9	(0,0) 17	(2,1) 3	(1,2) 62

Repetición Ib:
AB confundido

Bloque			
10	(0,1) 97	(2,0) 75	(1,2) 28
11	(1,0) 32	(2,1) 9	(0,2) 12
12	(1,1) 46	(0,0) 67	(2,2) 96

Repetición IIb:
AB^2 confundido

Puesto que AB está confundido con bloques en las repeticiones tipo I, su efecto se estimará a partir de las repeticiones tipo II. Por el contrario, el efecto de AB^2 se estimará a partir de las repeticiones tipo I.

TOTALES DE TRATAMIENTOS(FACTORIAL 3^2)

	Repeticiones				Totales		
Tratamientos	Ia	IIa	Ib	IIb	Tij	Tij(I)	Tij(II)
(0,0)T_{00}	8	72	17	67	164	25	139
(1,0)	84	59	4	32	179	88	91
(2,0)	47	33	20	75	175	67	108
(0,1)T_{01}	3	91	72	97	263	75	188
(1,1)	28	41	65	46	180	93	87
(2,1)	23	46	3	9	81	26	55
(0,2)T_{02}	19	13	99	12	146	118	25
(1,2)	82	77	62	28	249	144	105
(2,2)	35	34	30	96	195	65	130
Suma	329	466	372	462	1629	701	928

Tij = Totales de trat. sobre todas las repeticiones
Tij(I) = Totales de trat. sobre repeticiones de tipo I
Tij(II) = Totales de trat. sobre repeticiones de tipo II

TOTALES DE BLOQUES. FACTORIAL 3^2.

Bloque	B_k	Bloque	B_k	Bloque	B_k	Bloque	B_k
1	94	4	147	7	184	10	200
2	122	5	201	8	106	11	53
3	113	6	118	9	82	12	209

PASOS PARA REALIZAR EL ANALISIS ESTADISTICO

1.- Cálculo del factor de corrección

$$C = \frac{G^2}{3^2 r} = \frac{1692^2}{9 x 4} = 73712$$

2.- Cálculo de la Suma de Cuadrados Total

$$SCTotal = \sum y^2 - C = 19^2 + 47^2 + ... + 96^2 - C = 31891$$

3.- Cálculo de la Suma de Cuadrados debido a bloques

$$SCBloques = \frac{\sum B_k^2}{3} - C = \frac{94^2 + ... + 209^2}{3} - C = 9864$$

4.- Cálculo de la SC(A)

Esta suma requiere de la obtención de los totales $(A)_0$, $(A)_1$, $(A)_2$

$$(A)_0 = T_{0.} = T_{00} + T_{01} + T_{02} = 164 + 263 + 143 = 570$$
$$(A)_1 = T_{1.} = T_{10} + T_{11} + T_{12} = 179 + 180 + 249 = 608$$
$$(A)_2 = T_{2.} = T_{20} + T_{21} + T_{22} = 175 + 81 + 195 = 451$$

$$SC(A) = \frac{(A)_0^2 + (A)_1^2 + (A)_2^2}{3r} - C = \frac{570^2 + 608^2 + 451^2}{3x4} - C = 1118$$

5.- Cálculo de la SC(B)

Esta suma requiere de la obtención de los totales $(B)_0$, $(B)_1$, $(B)_2$

$$(B)_0 = T_{\cdot 0} = T_{00} + T_{10} + T_{20} = 164 + 179 + 175 = 518$$
$$(B)_1 = T_{\cdot 1} = T_{01} + T_{11} + T_{21} = 263 + 180 + 81 = 608$$
$$(B)_2 = T_{\cdot 2} = T_{02} + T_{12} + T_{22} = 143 + 249 + 195 = 587$$

$$SC(B) = \frac{(B)_0^2 + (B)_1^2 + (B)_2^2}{3r} - C = \frac{518^2 + 524^2 + 587^2}{3x4} - C = 244$$

6.- Cálculo de la SC(AB)

Esta suma requiere de la obtención de los totales $(AB)_0$, $(AB)_1$, $(AB)_2$

$$(AB)_0 = T_{00(II)} + T_{12(II)} + T_{21(II)} = 139 + 105 + 55 = 299$$
$$(AB)_1 = T_{01(II)} + T_{10(II)} + T_{22(II(} = 188 + 91 + 130 = 409$$
$$(AB)_2 = T_{02(II)} + T_{20(II)} + T_{11(II)} = 25 + 108 + 87 = 220$$

$$SC(AB) = \frac{(AB)_0^2 + (AB)_1^2 + (AB)_2^2}{3x2} - \frac{\left[(AB)_0 + (AB)_1 + (AB)_2\right]^2}{9x2}$$

$$SC(AB) = \frac{299^2 + 409^2 + 220^2}{6} - \frac{(299 + 409 + 220)^2}{18} = 3003$$

7.- Cálculo de la SC(AB^2)

Esta suma requiere de la obtención de los totales $(AB^2)_0$, $(AB^2)_1$, $(AB^2)_2$

$$(AB^2)_0 = T_{00(I)} + T_{11(I)} + T_{22(I)} = 25 + 93 + 65 = 183$$
$$(AB^2)_1 = T_{02(I)} + T_{10(I)} + T_{21(I)} = 118 + 88 + 26 = 232$$
$$(AB^2)_2 = T_{01(II} + T_{12(I)} + T_{20(I)} = 75 + 144 + 6 = 286$$

$$SC(AB^2) = \frac{(AB^2)_0^2 + (AB^2)_1^2 + (AB^2)_2^2}{3x2} - \frac{[(AB^2)_0 + (AB^2)_1 + (AB^2)_2]^2}{9x2}$$

$$SC(AB^2) = \frac{183^2 + 232^2 + 286^2}{6} - \frac{(183 + 232 + 286)^2}{18} = 885$$

8.- Construcción del ANAVAR

ANAVAR DE UN FACTOR 3^2 CON CONFUSION PARCIAL

F. de V.	G. de L.	SC	CM	Fc
Bloques	11	9864	897	<1
A	2	1118	559	<1
B	2	244	122	<1
AB (Rep. II)	2	3003	1502	1,43
AB^2 (Rep.I)	2	885	442	<1
Error	16	16777	1049	
Total	35	31891		

Si no se presentan efectos confundidos sería más conveniente condensar los resultados en la forma siguiente:

INTERACCIÓN DE AxB IGNORANDO CONFUSION

		a			
		0	1	2	SUMA
	0	164	179	175	518
b	1	263	180	81	524
	2	143	249	195	587
SUMA		570	608	451	1629

SC(A) se obtiene a partir de los totales por columnas.
SC(B) se obtiene a partir de los totales por filas.

$$SC(AxB) = \frac{\sum T_{ij}^2}{r} - SC(A) - SC(B) - C$$

$$SC(AxB) = \frac{164^2 + ... + 195^2}{4} - 1118 - 224 - 73712 = 446812$$

La suma de cuadrados atribuible a bloques, se refiere a repeticiones completas y no a bloques incompletos, produciendo:

$$SCBloques = \frac{329^2 + 466^2 + 372^2 + 462^2}{9} - C = 1535$$

ANAVAR DE UN FACTOR 3^2 EN BLOQUES COMPLETOS

F. de V.	G. de L.	SC	CM	Fc
Bloques	3	1535	512	<1
A	2	1118	559	<1
B	2	244	122	<1
AxB	4	4468	1177	1,09
Error	24	24526	1022	
Total	35	31891		

FACTORIAL S^n, $S=P^m$, DONDE P ES UN NUMERO PRIMO

Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ las combinaciones de tratamientos, en las que cada Xi tom aun valor 0, 1, 2, ... (s-1) y μ_0, μ_1, μ_2, ..., $\mu_{(s-1)}$ son las marcas del campo de Galois, el efecto principal del primer factor resulta al comparar las s medias de efectos de tratamientos, para las cuales, las relaciones:

$X_1 = 0, 1, 2, \ldots, (s\text{-}1)$
$\mu_{X1} = \mu_0, \; \mu_1, \; \mu_2, \ldots, \; \mu_{(s-1)}$
se satisfacen satisfactoriamente.

El efecto principal del segundo factor, es el resultado de comparar las medias de los efectos de tratamientos que satisfacen:

$X_2 = 0, 1, 2, \ldots, (s\text{-}1)$
$\mu_{X2} = \mu_0, \; \mu_1, \; \mu_2, \ldots, \; \mu_{(s-1)}$
y así sucesivamente.

La interacción de los primeros dos (2) factores tiene $(s - 1)^2$ grados de libertad, que se pueden dividir en componentes ortogonales de (s -1) grados de libertad definidos por:

$$\mu_{X1} + \mu_{X2} = \mu_0, \; \mu_1, \; \mu_2, \ldots, \; \mu_{(s-1)} \qquad (10.12)$$

donde la suma toma algunos de los valores $\mu_0, \; \mu_1, \; \mu_2, \ldots, \; \mu_{(s-1)}$.

La interacción entre los tres (3) primeros factores tiene $(s - 1)^3$ grados de libertad, que se pueden dividir en $(s -1)^2$ componentes ortogonales dados por:

$$\mu_{X1} + \mu_{X2} + \mu_{X3} = \mu_0, \; \mu_1, \; \mu_2, \ldots, \; \mu_{(s-1)} \qquad (10.13)$$

Si (X_1, X_2) son las combinaciones de tratamientos para el factorial 4^2, se tiene:

$\mu_{X1} = \mu_0 ,\ \mu_1 ,\ \mu_2 ,\ \mu_3$ efecto principal de A
$\mu_{X2} = \mu_0 ,\ \mu_1 ,\ \mu_2 ,\ \mu_3$ efecto principal de B
$\mu_{X1} + \mu_1 \mu_{X2} = \mu_0 ,\ \mu_1 ,\ \mu_2 ,$ componente de la interacción AB
$\mu_{X1} + \mu_2 \mu_{X2} = \mu_0 ,\ \mu_1 ,\ \mu_2 ,\ \mu_3$ componente de la interacción AB^2
$\mu_{X1} + \mu_3 \mu_{X2} = \mu_0 ,\ \mu_1 ,\ \mu_2 ,\ \mu_3$ componente de la interacción AB^3

Para un experimento factorial 4^2 se tiene la siguiente combinación de tratamientos:

(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)

Pero si se considera que bloques de dieciseis (16) unidades experimentales son demasiado grandes para controlar la heterogeneidad, un esquema de tamaño 4 que da información completa sobre los efectos principales y 2/3 de información sobre la interacción.

Se tiene entonces:

Bloq	Repetición I	Bloq	Repetición II	Bloq	Repetición III
1	(,)(,)(,)(,)	5	(,)(,)(,)(,)	9	(,)(,)(,)(,)
2	(,)(,)(,)(,)	6	(,)(,)(,)(,)	10	(,)(,)(,)(,)
3	(,)(,)(,)(,)	7	(,)(,)(,)(,)	11	(,)(,)(,)(,)
4	(,)(,)(,)(,)	8	(,)(,)(,)(,)	12	(,)(,)(,)(,)
AB confundido		AB^2 confundido		AB^3 confundido	

Para la asignación de los tratamientos se utiliza el Campo de Galois.
Sean las operaciones F = (F: #,*) que cumplen las siguientes propiedades:

1.- (a#b)#c = a#(b#c) Propiedad asociativa
2.- (a*b)*c = a*(b*c) Propiedad asociativa
3.- Existe I tal que I#a = a#I = a, I $\in$ F
4.- Existe I tal que I*a = a*I = a, I $\in$ F
5.- Existe a'#a = a#a' = I
6.- Existe a'*a = a*a' = I
7.- a#(b*c) = a#b * a#c Propiedad distributiva

Entonces se dice que estas operaciones constituyen un Campo de Galois. Para la aplicacion de los tratamientos, se definen las siguientes operaciones dentro de un Campo de Galois:

+	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3
μ_0	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3
μ_1		μ_0	μ_3	μ_2
μ_2			μ_0	μ_1
μ_3				μ_0

.	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3
μ_0	μ_0	μ_0	μ_0	μ_0
μ_1		μ_1	μ_2	μ_3
μ_2			μ_3	μ_1
μ_3				μ_2

En la repetición I se tendrá AB confundido. Para AB confundido, se tiene $\mu_{X1} + \mu_1\mu_{X2} = \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$. Se tiene para los tratamientos, utilizando las operaciones + y . definidas anteriormente:

$$(0,0) = \mu_0 + \mu_1\mu_0 = \mu_0 + \mu_0 = \mu_0$$
$$(0,1) = \mu_0 + \mu_1\mu_1 = \mu_0 + \mu_1 = \mu_1$$
$$(0,2) = \mu_0 + \mu_1\mu_2 = \mu_0 + \mu_2 = \mu_2$$
$$(0,3) = \mu_0 + \mu_1\mu_3 = \mu_0 + \mu_3 = \mu_3$$
$$(1,0) = \mu_1 + \mu_1\mu_0 = \mu_1 + \mu_0 = \mu_1$$
$$(1,1) = \mu_1 + \mu_1\mu_1 = \mu_1 + \mu_1 = \mu_0$$
$$(1,2) = \mu_1 + \mu_1\mu_2 = \mu_1 + \mu_2 = \mu_3$$
$$(1,3) = \mu_1 + \mu_1\mu_3 = \mu_1 + \mu_3 = \mu_2$$

$(2,0) = \mu_2 + \mu_1\mu_0 = \mu_2 + \mu_0 = \mu_2$
$(2,1) = \mu_2 + \mu_1\mu_1 = \mu_2 + \mu_1 = \mu_3$
$(2,2) = \mu_2 + \mu_1\mu_2 = \mu_2 + \mu_2 = \mu_0$
$(2,3) = \mu_2 + \mu_1\mu_3 = \mu_2 + \mu_3 = \mu_1$
$(3,0) = \mu_3 + \mu_1\mu_0 = \mu_3 + \mu_0 = \mu_3$
$(3,1) = \mu_3 + \mu_1\mu_1 = \mu_3 + \mu_1 = \mu_2$
$(3,2) = \mu_3 + \mu_1\mu_2 = \mu_3 + \mu_2 = \mu_1$
$(3,3) = \mu_3 + \mu_1\mu_3 = \mu_3 + \mu_3 = \mu_0$

De manera que queda:

Bloque	Repeticion I			
1	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(3,3)
2	(0,1)	(1,0)	(2,3)	(3,2)
3	(0,2)	(1,3)	(2,0)	(3,1)
4	(0,3)	(1,2)	(2,1)	(3,0)

De manera similar se procede con AB^2 confundido, con el contraste $\mu_{X1} + \mu_2\mu_{X_2} = \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3.$

Bloque	Repeticion II			
1	(0,0)	(1,3)	(2,1)	(3,2)
2	(0,3)	(1,0)	(2,2)	(3,1)
3	(0,1)	(1,2)	(2,0)	(3,3)
4	(0,2)	(1,1)	(2,3)	(3,0)

De manera similar se procede con AB^3 confundido, con el contraste $\mu_{X1} + \mu_3\mu_{X_2} = \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3.$

Bloque	Repeticion III			
1	(0,0)	(1,2)	(2,3)	(3,1)
2	(0,2)	(1,0)	(2,1)	(3,3)
3	(0,3)	(1,1)	(2,0)	(3,2)
4	(0,1)	(1,3)	(2,2)	(3,0)

ANAVAR

F. de V.	G. de L.
Repeticiones	3r -1
Bloques dentro de repeticiones	9r
A Información Completa	3
B Información Completa	3
AB 2/3 de información	3
AB^2 2/3 de información	3
AB^3 2/3 de información	3
Error	36r - 15
Total	48r - 1

Una vez ubicados los tratamientos dentro de los bloques, es necesario producir una aleatorización entre bloques de una repetición y entre tratamientos de un mismo bloque.

Considérese el siguiente ejemplo una vez realizada la aleatorización:

Bloque	Repetición I				
	AB confundido				$R_1 = 656$
1	(3,2)	(1,0)	(0,1)	(2,3)	
	16	29	8	60	$B_1 = 113$
2	(0,3)	(3,0)	(1,2)	(2,1)	
	19	24	64	37	$B_2 = 154$
3	(1,1)	(0,0)	(2,2)	(3,3)	
	82	30	16	69	$B_3 = 197$
4	(2,0)	(3,1)	(1,3)	(0,2)	
	27	51	45	61	$B_4 = 184$

Bloque	Repetición II				
	AB^2 confundido				$R_2 = 1014$
5	(1,2)	(2,0)	(0,1)	(3,3)	
	70	98	6	76	$B_5 = 250$
6	(2,2)	(0,3)	(3,1)	(1,0)	
	52	75	40	84	$B_6 = 251$
7	(3,2)	(1,3)	(2,1)	(0,0)	
	14	60	9	98	$B_7 = 181$

8	(0,2)	(1,1)	(3,0)	(2,3)	
	74	76	82	100	$B_8 = 332$
	Bloque Repetición III				
	AB^3 confundido				$R_3 = 807$
9	(2,2)	(0,1)	(1,3)	(3,0)	
	51	82	15	86	$B_9 = 234$
10	(0,3)	(2,0)	(3,2)	(1,1)	
	52	75	40	84	$B_{10} = 153$
11	(3,3)	(0,2)	(2,1)	(1,0)	
	47	61	44	6	$B_{11} = 15$
12	(1,2)	(2,3)	(3,1)	(0,0)	
	100	22	80	60	$B_{12} = 262$

$G = R_1 + R_2 + R_3 = 2477$

$$F_c = \frac{2477^2}{4^2.3} = 127823{,}52$$

$$SCTotal = 16^2 + 29^2 + \ldots + 60^2 - F_c$$

$$SCRep = \frac{656^2 + 1014^2 + 807^2}{16} - F_c = 4037{,}79$$

$$SC(\text{Bloques dentro repeticiones}) = \frac{\sum B_i^2}{4} - \frac{\sum R^2}{16} = 6122{,}94$$

Con estos resultados, se elabora la tabla siguiente para la estimación de *los efectos factoriales*.

μ_1	A_i	B_i	$(AB)_i$	$(AB^2)_i$	$(AB^3)_i$
Todas las repeticiones			Rep II, III	Rep I, III	Rep I, II
μ_0	A_0	B_0	$(AB)_0$	$(AB^2)_0$	$(AB^3)_0$
μ_1	A_1	B_1	$(AB)_1$	$(AB^2)_1$	$(AB^3)_1$
μ_2	A_2	B_2	$(AB)_2$	$(AB^2)_2$	$(AB^3)_2$
μ_3	A_3	B_3	$(AB)_3$	$(AB^2)_3$	$(AB^3)_3$

A_0 = suma sobre todas las repeticiones para las cuales $\mu_{X1} = \mu_0$; es decir para los tratamientos (0,0), (0,1),(0,2) y (0,3) que son: $8 + 29 + 30 + ... + 61 + 60 = 636$
B_1 = suma sobre todas las repeticiones para las cuales $\mu_{X2} = \mu_1$; es decir para los tratamientos: (0,1), (1,1), (2,1), y (3,1) que son : $8 + 37 + 82 + 51 +.. + 80 = 524$
(AB)= suma sobre las repeticiones II y III para las cuales $\mu_{X1} + \mu_1\mu_{X2} = \mu$;es decir, los tratamientos: (0,2), (1,3), (2,0) y (3,1) en la repetición II y III, que son: $74 + 61 + 60 + ... + 80 = 430$

Así se llega a:

ESTIMACION DE EFECTOS FACTORIALES

μ_1	A_i	B_i	$(AB)_i$	$(AB^2)_i$	$(AB^3)_i$
Todas las rep.			Rep II, III	Rep I, III	Rep I, II
μ_0	636	644	469	327	513
μ_1	640	524	394	314	439
μ_2	518	659	430	399	407
μ_3	683	650	528	423	311
G	2477	2477	$R_2 + R_3 = 1821$	$R_1 + R_3 = 1463$	$R_1 + R_2 = 1670$

$$SCA = \frac{\sum A_i^2}{12} - F_c = \frac{636^2 + 640^2 + 518^2 + 483^2}{12} - F_c = 1252{,}23$$

6

$$SCB = \frac{\sum B_i^2}{12} - F_c = \frac{644^2 + 524^2 + 689^2 + 650^2}{12} - F_c = 1017{,}56$$

65

$$SCAB = \frac{\sum (AB)_i^2}{8} - \frac{(R_2 + R_3)^2}{32} = \frac{469^2 + 394^2 + 430^2 + 528^2}{8} - \frac{1821^2}{32} = 1233{,}84$$

$$SC(AB^2) = \frac{\sum (AB^2)^2}{8} - \frac{(R_1 + R_3)^2}{32} = \frac{327^2 + 314^2 + 399^2 + 423^2}{8} - \frac{1463^2}{32} = 1070{,}35$$

$$SC(AB^3) = \frac{\sum (AB^3)^2}{8} - \frac{(R_1 + R_2)^2}{32} = \frac{513^2 + 439^2 + 407^2 + 311^2}{8} - \frac{1670^2}{32} = 2629{,}37$$

Tabla 10.1. ANAVAR de un experimento Factorial 4^2 con confusión Parcial

F. de V.	G. de L.	SC	CM	F_c
Repeticiones	2	4037,79	2018,90	1,82
BDR	9	6122,94		
A	3	1252,23	417,41	<1
B	3	1017,56	339,19	<1
AB	3	1233,84	411,28	<1
AB^2	3	1070,35	356,78	<1
AB^3	3	2629,37	876,46	<1
Error	21	23299,40	1109,50	
Total	47	40663,18		

Capítulo 11

EXPERIMENTOS FACTORIALES CON EFECTOS PRINCIPALES CONFUNDIDOS PARCELAS DIVIDIDAS

Introducción

Una vez estudiados los experimentos factoriales y el principio del confundido, se quiere presentar un diseño experimental muy utilizado tanto en el campo como en el laboratorio donde se unen las aplicaciones de experimentos factoriales y el principio de confundido.

Si la naturaleza de los niveles de un factor **a**: $(a_o, a_1, \dots, a_{p-1})$ excluyen la utilización de unidades experimentales pequeñas o bien es conocido por el experimentador que dichos niveles difieren en rendimiento, los niveles de **a** pueden ser asignados a unidades relativamente grandes denominadas parcelas principales en un diseño de bloques aleatorios, cuadrado latino o cualquier otro diseño. Siendo tales parcelas grandes por la necesidad o por el diseño, a la vez es deseable comparar niveles de otro factor **b**: $(b_o, b_1, \dots, b_{q-1})$, que son ubicados aleatoriamente en parcelas divididas dentro de cada parcela principal y que se denominan sub-parcelas. Lo explicado corresponde a un arreglo factorial de los factores **a** y **b** cuyos niveles son p y q respectivamente, donde el efecto principal A tendrá p-1 grados de libertad, confundido completamente con bloques incompletos o parcelas principales. En tal forma el diseño en parcelas divididas es un diseño de bloques incompletos.

Los tratamientos de la parcela principal pueden ellas mismas representar un arreglo factorial $k^n \times s^m$, los tratamientos de la subparcela pueden también representar un arreglo factorial. La terminología tratamiento principal o secundario no necesariamente hace referencia a los niveles de un solo factor. En experimentación agrícola, la utilización de este diseño es amplia, en estudios sobre riego, fertilización, poblaciones, entre otros.

Ventajas del diseño en parcelas divididas

1.- Facilita la utilización de unidades experimentales grandes por necesidad o por diseño para comparar tratamientos secundarios.

2.- Incrementa la precisión sobre los bloques aleatorios, de los pq tratamientos contenidos en las sub-parcelas.

3.- La precisión puede ser incrementada utilizando un diseño cuadrado latino o cuadrado latino incompleto.

Desventajas del diseño en parcelas divididas

1.- Los tratamientos de las parcelas principales son medidos con menor precisión que si ellos estuviesen en un diseño de bloques aleatorios de pq tratamientos.

2.- La ocurrencia de datos perdidos conduce a una mayor complejidad del análisis.

Aplicación de la aleatorización en este diseño

1.- Depende del diseño utilizado: bloques aleatorios, cuadrado latino, entre otros.

2.- Los tratamientos asignados a las parcelas también dependerán del diseño particularmente asignado.

Análisis

Parcelas divididas en bloques aleatorios

Niveles del factor para el efecto A: a_0 , a_1 , a_2 , a_3 $p = 4$
Niveles del factor para el efecto B: b_0 , b_1 , b_2 $q = 3$

Tratamientos: $p \times q = 4 \times 3 = 12$
Repetición: $r = 3$

Rep I				Rep II				Rep III			
a_3	a_1	a_2	a_0	a_1	a_0	a_2	a_3	a_1	a_3	a_0	a_2
b_2	b_2	b_1	b_1	b_1	b_0	b_0	b_1	b_2	b_2	b_0	b_1
b_0	b_0	b_2	b_2	b_2	b_2	b_1	b_2	b_1	b_0	b_2	b_0
b_1	b_1	b_0	b_0	b_0	b_1	b_2	b_0	b_0	b_1	b_1	b_2

Análisis de Varianza

F. de V	G. de L.
Repeticiones	$r - 1 = 2$
A	$p - 1 = 3$
Error (a)	$(r - 1)(p - 1) = 6$
Total Unidad Principal	$pr - 1 = 11$
B	$q - 1 = 2$
A x B	$(p - 1)(q - 1) = 6$
Error (b)	$p(r - 1)(q - 1) = 16$
Total Subunidades	$pr(q - 1) = 24$
Total	$pqr - 1 = 35$

Debido a que los niveles del factor **a** son comparados en tres replicaciones de un bloque aleatorio, el cuadrado medio de la interacción de la repetición por el efecto A, es el error apropiado para comparar el efecto A y se denota error (a). En igual forma, el error (b) se compone de las siguientes interacciones: (RxB) y (RxAxB), la primera es la interacción de primer orden de la repetición por el efecto B y la segunda es la interacción de segundo orden de la repetición por el efecto A y por el efecto B, este es el error apropiado para comparar la interacción de primer orden de los efectos (AxB) y en algunas instancias para comparar el efecto B.

Los efectos de las interacciones RxB y RxAxB están confundidos y no son separables. Sin embargo, aritméticamente es posible separarlas, pero ambas interacciones son estimaciones de la misma cantidad, por lo que figuran juntas en la suma de cuadrados del error (b). Esta cantidad debe ser llamada Suma de cuadrados de RxB dentro de las parcelas principales.

No tomando en cuenta la diferencia en grados de libertad, la eficiencia de la parcela dividida en relación al bloque aleatorio tomando en cuenta B y AxB es:

$$\frac{[(p-1)+(p-1)(r-1)]Ea+[(p-1)(q-1)+p(r-1)(q-1)]Eb}{(pqr - r)} = \frac{(p-1)\,Ea+p(q-1)\,Eb}{(pq-1)\,Eb} = \frac{E'e}{E'b} \qquad (11.1)$$

donde:
p = número de tratamientos de parcelas principales
q = número de tratamientos de parcelas secundarias
r = número de repeticiones
E(a) = cuadrado medio del error de (a)
E(b) = cuadrado medio del error de (b)

La eficiencia en los efectos A o las comparaciones de parcelas principales puede ser obtenida mediante la fórmula:

$$\frac{E'e}{Ea} \qquad (11.2)$$

Partición de los Grados de Libertad para el Diseño

Parcelas Divididas con diferentes arreglos de unidades experimentales

En las Tablas 11.1, 11.2, y 11.3 se muestran los esquemas de ANAVAR para diferentes arreglos de unidades experimentales.

Tabla 11.1. Esquema de ANAVAR para un Diseño en Parcelas divididas en un diseño completamente aleatorizado con r repeticiones.

F. de V	G. de L.
A	p - 1
Error (a)	p(r - 1)
Total Unidad Principal	pr - 1
B	q - 1
AB	(p - 1)(q - 1)
Error (b)	p(r - 1)(q - 1)
Total Subunidades	pr(q - 1)
Total	pqr - 1

Tabla 11.2. Esquema de ANAVAR para un Diseño en Parcelas divididas en un diseño en bloques aleatorios con r bloques completos.

F. de V	G. de L.
Repeticiones	r - 1
A	p - 1
Error (a)	(r - 1)(p - 1)
Total Unidad Principal	pr - 1
B	q - 1
A x B	(p - 1)(q - 1)
Error (b)	p(r - 1)(q - 1)
Total Subunidades	pr(q - 1)
Total	pqr - 1

Tabla 11.3. Esquema de ANAVAR para un Diseño en Parcelas divididas en un diseño cuadrado latino con p = lado del cuadrado

F. de V	G. de L.
Hileras	p - 1
Columnas	p - 1
A	p - 1
Error (a)	(p-1)(p-2)
Total Unidad Principal	$p^2 - 1$
B	q - 1
AB	(p - 1)(q - 1)
Error (b)	p(p - 1)(q - 1)
Total Subunidades	$p^2(q - 1)$
Total	$p^2q - 1$

E(a) es generalmente mayor que E(b); esto es debido a que las observaciones en subunidades de la misma unidad principal tienden a ser positivamente correlacionadas y en esta forma reaccionan en forma más parecida que las subunidades principales diferentes. En caso de ocurrir que E(a) sea menor que E(b) lo propio es considerar a E(a) y E(b) como estimaciones de la misma varianza σ^2 y consecuentemente las sumas de cuadrados deben sumarse y dividirse por los grados de libertad a fin de obtener una estimación de σ^2 . En caso de que E(a) sea significativamente mayor que E(b) debería ser considerado seriamente la difícil posibilidad de una correlación intraclase negativa.

Las desviaciones estándar o errores estándar apropiados para las comparaciones entre diferentes medias son:

Dos medias de A	$a_i - a_j$	$a_1 - a_2$	$\sqrt{\frac{2\,E(a)}{rq}}$
Dos medias de B	$b_i - b_j$	$b_1 - b_2$	$\sqrt{\frac{2\,E(b)}{rp}}$
Dos medias de B al mismo nivel de A	$a_i b_j - a_i b_k$	$a_1 b_1 - a_1 b_2$	$\sqrt{\frac{2\,E(b)}{r}}$
Dos medias de A al mismo nivel de B	$a_i b_j - a_k b_j$	$a_i b_1 - a_2 b_1$	$\sqrt{\frac{2(q-1)\,E(b)+E(a)}{rq}}$
Dos medias de A a diferentes niveles de B (medias de dos tratamientos)	$a_i b_j - a_k b_m$	$a_1 b_2 - a_2 b_1$	$\sqrt{\frac{2(q-1)\,E(b)+E(a)}{rq}}$

Las comparaciones de dos medias de A al mismo o diferentes niveles de B, involucra tanto el efecto principal de A como la interacción AB, lo cual significa que ambas son comparaciones de subunidades, por lo que es apropiado usar el promedio ponderado de E(a) y E(b) como se observa en el cuadro anterior. Para tales comparaciones, la razón de la diferencia entre dos tratamientos a su error estándar no sigue la distribución de "t", una aproximación sería:

$$t' = \frac{(q-1)\,E(b)\,t(b) + E(a)\,t(a)}{(q-1)\,E(b) + E(a)} \qquad 11.3)$$

t(a) y t(b) son valores tabulados de t, seleccionados a los niveles de significación correspondientes a los grados de libertad de E(a) y E(b). t' corresponderá a un t tabulado y caerá entre t(a) y t(b).

Existen muchas variantes del diseño parcelas divididas, estas variantes comprenden por ejemplo, divisiones de las subunidades debido a la inclusión de

un tercer factor C a u niveles, lo cual conduce a la partición de los grados de libertad de acuerdo a las subunidades o unidades terciarias; el esquema del añadido al análisis de la varianza para dicho factor sería:

F. de V	G. de L.
C	u - 1
AC	(p - 1)(u - 1)
BC	(q - 1)(u - 1)
ABC	(p - 1)(q - 1)(u - 1)
Error (c)	pq(u - 1)(r - 1)
Unidades Terciarias	pqr(u - 1)
Total	pqru - 1

Modelo Matemático y Esperanza de los Cuadrados Medios

Modelo Lineal Aditivo

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \delta_{ij} + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \qquad (11.4)$$

donde:

μ = efecto de la media general.
ρ_i = efecto de la repetición i-ésima.
α_j = efecto del j-ésimo nivel del factor A
δ_{ij} = componente aleatorio del error asociado con el j-ésimo tratamiento de la parcela principal en la repetición i-ésima.
β_k = efecto del k-ésimo nivel del factor B.
$(\alpha\beta)_{jk}$ = efecto de la interacción del nivel i-ésimo del factor A con el nivel k-ésimo del factor B.
ε_{ijk} = componente aleatorio del error asociado con el tratamiento k-ésimo en la repetición i-ésima en la ubicación j-ésima.

El modelo puede ser de efectos fijos, aleatorios o mixtos de acuerdo con lo visto en la unidad sobre análisis de la varianza y visto en diseños anteriores.

A continuación (Tabla 11.4) se dan las esperanzas matemáticas de los cuadrados medios para parcelas divididas en bloques aleatorios, esto es básico para entender cual es el error apropiado para realizar validamente la prueba F. E igualmente las Tablas 11.5 y 11.6 muestran los esquemas de ANAVAR para parcelas divididas en bloques aleatorios y en cuadrado latino respectivamente.

Tabla 11.4 Valores promedios de los Cuadros Medios para un modelo de parcelas dividiodas en un diseño en bloques aleatorios

	E(CM) Modelo I	Denominador	E(CM) Modelo II	Denominador
Replicaciones	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2 + pq\sigma_\rho^2$	CME(a)	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2 + pq\sigma_\rho^2$	CME(a)
A	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2 + rq\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i^2}{p-1}$	CME(a)	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + rq\sigma_\alpha^2$	CME(a)
Error(a)	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2$		$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2$	
B	$\sigma_\varepsilon^2 + rp\sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k^2}{q-1}$	CME(b)	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + rp\sigma_\beta^2$	CME(b)
AB	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} \frac{(\alpha\beta)_{jk}^2}{(p-1)(q-1)}$	CME(b)	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2$	CME(b)
Error(b)	σ_ε^2		σ_ε^2	

Cont. Tabla 11.4

	E(CM) Modelo III A fijo B aleatorio	Denominador	E(CM) Modelo III A aleatorio B fijo	Denominador
Bloque	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2 + pq\sigma_\rho^2$	CME(a)	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2 + pq\sigma_\rho^2$	CMEE
A	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2 + r\frac{p}{p-1}\sigma_{\alpha\beta}^2 + rp\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i^2}{p-1}$	CMAB	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2 + rq\sigma_\alpha^2$	CMEE
Error(a)	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2$		$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_\delta^2$	
B	$\sigma_\varepsilon^2 + rp\sigma_\beta^2$	CMEE	$\sigma_\varepsilon^2 + r\frac{q}{q-1}\sigma_{\alpha\beta}^2 + rp\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k^2}{q-1}$	CMAB
AB	$\sigma_\varepsilon^2 + r\frac{p}{p-1}\sigma_{\alpha\beta}^2$	CMEE	$\sigma_\varepsilon^2 + r\frac{q}{q-1}\sigma_{\alpha\beta}^2$	CMEE
Error(b)	σ_ε^2		σ_ε^2	

Tabla 11.5. Esquema de análisis de varianza de parcelas divididas en bloques aleatorios

F. de V.	G. de L.	Suma de Cuadrados	CM
Repeticiones	r-1	$\sum_{i=1}^{r} \frac{Y^2_{...}}{pq} - F.C.$	SCBloq/(r-1)
A	p-1	$\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} \frac{Y^2_{.j.}}{rq} - F.C.$	SCA/(p-1)
Error(a)	(r - 1)(p - 1)	$\frac{\sum_{ij} Y^2_{ij.}}{q} - F.C. - SC(R) - SC(A)$	SCE(a)/(r -1)(p - 1)
Unidades Principales	pr - 1	$\frac{\sum_{ij} Y^2_{ij.}}{q} - F.C.$	
B	q-1	$\sum_{k=1}^{q} \frac{Y^2_{..k}}{rp} - F.C.$	SCB/(q-1)
AB	(p-1)(q-1)	$\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} \frac{Y^2_{.jk}}{r} - F.C. - SCA - SCB$	SCAB/(p -1)(q -1)
Error(b)	p(r - 1)(q - 1)	SCTotal -SCUnidades Principales - SCB - SCAB	SCE(b)/p(r -1)(q - 1)
Total	pqr - 1	$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} Y^2_{ijk} - F.C.$	

$$F.C. = (GranTotal)^2 / pqr$$

Tabla 11.6. Esquema de análisis de varianza de parcelas divididas en cuadrado latino Parcelas Principales en Cuadrado latino

F. de V.	G. de L.	Suma de Cuadrados	CM
A	p - 1	$\sum_{i=1}^{r} \frac{Y_{i..}^2}{p} - F.C.$	SCA /(p - 1)
Columnas(C)	p - 1	$\sum_{i=1}^{r} \frac{Y_{.j.}^2}{p} - F.C.$	SC(C) /(p - 1)
Hileras (H)	p - 1	$\sum_{i=1}^{r} \frac{Y_{..k}^2}{p} - F.C.$	SC(H) /(p - 1)
Error(a)	(p - 1)(p - 2)	$\sum_{ij,k} Y_{ijk}^2 - F.C. - SC(A) - SC(C) - SC(H)$	SCE(a)/(r -1)(p - 1)
Parcelas Principales	p^2 - 1	$\sum_{ij,k} Y_{ijk}^2 - F.C.$	
B	q-1	$\frac{\sum_{m} Y_{...m}^2}{p^2} - F.C.$	SCB/(q-1)
AB	(p-1)(q-1)	$\frac{\sum_{i,m} X_{i...m}^2}{p} - F.C. - SCA - SCB$	SCAB/(p -1)(q -1)
Error(b)	p(q- 1)(p - 1)	SCTotal -SCParcelas Principales - SCB - SCAB	SCE(b)/p(q -1)(p - 1)
Total	p^2q - 1	$\sum_{i,j,k} Y_{ijkm}^2 - F.C.$	

Ejemplo Ilustrativo

El siguiente ejemplo está basado en las pruebas de germinación, en los que a semillas de ocho variedades les fueron aplicadas los siguientes cuatro tratamientos:

Semilla

- b_0 trillada y no tratada con lupodorito de sodio
- b_1 no trillada y no tratada con lupodorito de sodio
- b_2 no trillada y tratada con lupodorito de sodio
- b_3 trillada y tratada con lupodorito de sodio

Se utilizaron tres repeticiones. Los resultados obtenidos por repeticiones y combinación fueron los dados en la Tabla 11.8.

Tabla 11.8. Datos en el ejemplo ilustrativo en parcelas divididas en un diseño en bloques aleatorios.

	REPETICION I								
	a_0b_1	a_2b_3	a_3b_0	a_5b_2	a_4b_2	a_1b_1	a_7b_3	a_6b_1	
	12	10	52	28	9	26	9	12	
	a_0b_2	a_2b_0	a_3b_3	a_5b_3	a_4b_3	a_1b_2	a_7b_1	a_6b_1	
	13	51	13	14	12	27	14	26	
	a_0b_0	a_2b_1	a_3b_2	a_5b_1	a_4b_0	a_1b_0	a_7b_2	a_6b_3	
	66	8	19	8	45	77	30	15	
	a_0b_3	a_2b_2	a_3b_1	a_5b_0	a_4b_1	a_1b_3	a_7b_0	a_6b_0	
	6	20	4	59	20	15	49	56	
Total	97	89	88	109	86	145	102	109	825

REPETICION II

	a_3b_2	a_6b_0	a_7b_3	a_4b_1	a_0b_3	a_1b_2	a_5b_1	a_2b_1	
	16	38	15	13	12	5	8	16	
	a_3b_1	a_6b_2	a_7b_3	a_4b_3	a_0b_0	a_1b_0	a_5b_2	a_2b_2	
	15	16	41	12	63	47	32	30	
	a_3b_3	a_6b_1	a_7b_2	a_4b_0	a_0b_2	a_1b_1	a_5b_3	a_2b_0	
	9	16	28	51	13	11	21	81	
	a_3b_0	a_6b_3	a_7b_1	a_4b_2	a_0b_1	a_1b_3	a_5b_0	a_2b_3	
	40	8	20	10	10	4	66	14	
Total	80	78	104	86	98	67	127	141	781

REPETICION III

	a_6b_3	a_7b_2	a_5b_0	a_4b_2	a_3b_2	a_2b_2	a_0b_1	a_1b_1	
	7	36	49	12	7	29	13	18	
	a_6b_2	a_7b_1	a_5b_2	a_4b_0	a_3b_0	a_2b_1	a_0b_3	a_1b_0	
	24	25	29	52	59	14	7	66	
	a_6b_1	a_7b_0	a_5b_3	a_4b_1	a_3b_1	a_2b_3	a_0b_0	a_1b_2	
	16	54	16	16	11	10	70	11	
	a_6b_0	a_7b_3	a_5b_1	a_4b_3	a_3b_3	a_2b_0	a_2b_0	a_1b_3	
	45	12	8	11	7	63	11	15	
Total	92	127	102	91	84	116	101	110	823

TOTALES PARA VARIEDADES Y TRATAMIENTOS

Trata-mientos	VARIEDADES								Total
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
b_0	199	190	195	151	148	174	139	144	1340
b_1	35	55	38	30	49	24	44	59	334
b_2	37	43	79	42	31	89	66	94	481
b_3	25	34	34	29	35	51	30	36	274
Total	296	322	346	252	263	338	279	333	2429

Factor de Corrección: $F.C. = \frac{\sum Y^2}{pqr} = \frac{2429^2}{(8)(3)(4)} = 61458,76$ (un grado de libertad)

Suma de Cuadrados

Suma de Cuadrados Totales

$$SCT = 12^2 + 10^2 + ... + 15^2 - F.C. = 36736,24 \quad \text{(95 grados de libertad)}$$

Suma de Cuadrados de Repeticiones

$$SCR = \frac{825^2 + 781^2 + 823^2}{8x4} - F.C. = 38,58 \text{ (2 grados de libertad)}$$

Suma de Cuadrados de Variedades

$$SCA = \frac{296^2 + 322^2 + ... + 333^2}{4x3} - F.C. = 763,16 \text{ (7 grados de libertad)}$$

Suma de Cuadrados de E(a)

$$\frac{97^2+89^2+...+101^2+110^2}{4} - \text{F.C.}-38{,}58-763{,}16=1377{,}25 \text{ (14 grados de libertad)}$$

Suma de cuadrados tratamientos de semillas

$$SCB=\frac{1340^2+334^2+481^2+274^2}{3x8} - \text{F.C}=30774{,}28 \text{ (3 grados de libertad)}$$

Suma de Cuadrados A x B

$$\text{SCAB}=\frac{199^2+190^2+...+30^2+36^2}{3} - \text{F.C.}-763{,}16-30774{,}28=2620{,}13 \quad \text{(21 g. de l.)}$$

Suma de Cuadrados de Error(b)

$$\text{SCE(b)}=36736{,}24-38{,}58-763{,}16-1377{,}25-30774{,}28-2620=1162{,}84$$

Análisis de Varianza

Vease Tabla 11.9 a continuación.

Tabla 11.9. Esquema de analisis de varianza de parcelas divididas en bloques aleatorios

F. de V.	G. de L.	Suma de Cuadrados	CM
Repeticiones	r-1=2	38,58	19,29
A	p-1=7	763,16	109,02
Error(a)	(r - 1)(p - 1)=14	1377,25	98,38
Unidades Principales	23		
B	q-1=3	30774,28	10258,09
AB	(p-1)(q-1)=21	2620,13	124,77
Error(b)	p(r - 1)(q - 1)=48	1377,25	24,33
Parcelas secundarias	72	36736,24	
Total	pqr - 1=95	36736,24	

DISCUSION

Si se asume que el efecto variedad es un efecto fijo, porque son las únicas variedades de interés al investigador (modelo I) el error(a) es el término correcto para hacer la comparación.

$$F = \frac{109,02}{98,33} = 1,11 \text{ (n.s.)} \qquad F(7,14,0.05) = 3,39$$

98,38

$$F(7,14,0.01) = 4,78$$

La selección de la varianza del Error Experimental para comparar la varianza entre las medias de la germinación para los cuatro tratamientos de las semillas depende de la hipótesis planteada. Si las ocho variedades constituyen una muestra aleatoria de una población de variedades y si un tratamiento de semilla va a ser recomendado para todas las variedades, el cuadrado medio de la interacción AxB es el error apropiado (modelo II)

$$F = \frac{10258,09}{124,77} = 82,2^{**} \qquad F(3,21,0.01) = 4,87$$

Si las ocho variedades representan solamente las variedades de interés y si el tratamiento de semilla recomendado es para las ocho variedades, entonces el CME(b) es el error adecuado para comparar dichas medias (modelo I).

Una tercera situación puede presentarse si se asume que las ocho variedades constituyen una muestra aleatoria de variedades, pero los diferentes tratamientos de semilla seran recomendados por variedad, ya que se plantea la interacción variedad por semilla. En este caso el CME(b) es el correcto denominador para la prueba de F.

Casos más complejos de parcelas divididas son utilizados por la experimentación agrícola, como son las parcelas divididas en el tiempo o en el espacio.

Existe además como caso de experimentos factoriales con efectos principales confundidos, el diseño de bloques divididos, subdivididos, otras subdivisiones y variaciones para lo cual se recomienda consultar las referencias.

DISEÑO EN FRANJAS O DISEÑO EN BLOQUES DIVIDIDOS

Introducción

Es una variante del diseño parcelas divididas, por cuanto la repetición del bloque completo, es dividido en forma reticular en parcelas o franjas en sentido vertical y horizontal, cuya ubicación en un eje de coordenadas semejarían dos bloques al azar superpuestos y en la intersección de ambas franjas quedan la subunidad con el tratamiento respectivo.

Combinación de los niveles de los factores

Ejemplo:

	a_0		b_0
A	a_1	B	b_1
	a_2		b_2
	a_3		

Tratamientos:

a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2
a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2
a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2
a_3b_0	a_3b_1	a_3b_2

Aleatorización:

En cada repetición o bloque completo, se aleatoriza cada nivel de A en franjas o parcelas en el sentido del eje de las Y. Cada nivel de B es aleatorizado en franjas o parcelas en el sentido del eje de las X. En un diseño en franja con tres repeticiones se tendría por ejemplo el siguiente esquema.

REPETICION I

	a_3	a_0	a_1	a_2
b_1				
b_0		a_0b_0		
b_2				

REPETICION II

	a_2	a_1	a_3	a_0
b_2				
b_1				
b_0				a_0b_0

REPETICION III

	a_1	a_3	a_0	a_2
b_0			a_0b_0	
b_2				
b_1				

Modelo Matemático y Esperanzas de los Cuadrados Medios

Modelo Lineal Aditivo

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \rho_k + \delta_{ik} + \beta_j + \gamma_{jk} + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (11.7)$$

donde:
i= 1, ... , a
j= 1, ... , b
k= 1, ... , r

Vea la Tabla 11.10 para establecer las Experanzas de los Cuadrados medios y la Tabla 11.11 para el ANAVAR correspondiente a este diseño.

Tabla 11.10 Valores promedios de los Cuadrados Medios para un modelo de parcelas en franja.

	E(CM) Modelo I	E(CM) Modelo II
Replicaciones	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\delta^2 + ab\sigma_\rho^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\delta^2 + ab\sigma_\rho^2$
A	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\delta^2 + rb\sum_{i=1}^{a} \frac{\alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\delta^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + rb\sigma_\alpha^2$
Error(a)	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\delta^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\delta^2$
B	$\sigma_e^2 + ra\sum_{j=1}^{b} \frac{\beta_j^2}{b-1}$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\gamma^2 + ar\sigma_\beta^2$
Error(b)	$\sigma^2 + a\sigma_\gamma^2$	$\sigma^2 + a\sigma_\gamma^2$
AB	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2$
Error(c)	σ_ε^2	σ_ε^2

Continuación de la Tabla 11.10

	E(CM) Modelo III A fijo B aleatorio	E(CM) Modelo III A aleatorio B fijo
Bloque	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\delta^2 + ab\sigma_\rho^2$	$\sigma^2_\varepsilon + b\sigma_\delta^2 + ab\sigma_\rho^2$
A	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\delta^2 + r\frac{a}{a-1}\sigma_{\alpha\beta}^2 + rb\sum_{i=1}^{a}\frac{\alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2_\varepsilon + b\sigma_\delta^2 + rb\sigma_\alpha^2$
Error(a)	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\delta^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_\delta^2$
B	$\sigma^2_\varepsilon + a\sigma_\gamma^2 + ra\sigma_\beta^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + a\sigma_\gamma^2 + r\frac{b}{b-1}\sigma_{\alpha\beta}^2 + ra\sum_{j=1}^{b}\frac{\beta_k^2}{b-1}$
Error(b)	$\sigma_\varepsilon^2 + a\sigma_\gamma^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + a\sigma_\gamma^2$
AB	$\sigma_\varepsilon^2 + r\frac{a}{a-1}\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\frac{b}{b-1}\sigma_{\alpha\beta}^2$
Error(c)	σ_ε^2	σ_ε^2

Tabla 11.11.- ESQUEMA DE ANÁLISIS DE VARIANZA DE PARCELAS DIVIDIDAS EN BLOQUES ALEATORIOS

F. de V.	G. de L.	Suma de Cuadrados	CM
Repeticiones	r-1	$\sum_{k=1}^{r} \frac{Y_{..k}^2}{ab} - F.C.$	SCBloq/(r-1)
A	a-1	$\sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i..}^2}{rb} - F.C.$	SCA/(a-1)
Error(a)	(a - 1)(r - 1)	$\frac{\sum_{i.k} Y_{i.k}^2}{b} - F.C. - SC(R) - SC(A$	SCE(a)/(a-1)(r - 1)
Unidades Principales	ra- 1	$\frac{\sum_{i.k} Y_{i.k}^2}{b} - F.C.$	SCE(a)/(a-1)(r - 1)
B	b-1	$\sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{.j.}^2}{ra} - F.C.$	SCB/(b-1)
Error(b)	(r-1)(b-1)	$\sum_{j.k} \frac{Y_{.jk}^2}{a} - F.C. - SC(R) - SCB$	SCE(b)/(b-1)(r - 1)
AB	(a-1)(b-1)	$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{ij.}^2}{r} - F.C. - SCA - SCE$	SCAB/(a-1)(b-1)
Error(c)	(r -1)(a-1)(b-1)	Por diferencia	SCE(c)/(r -1)(a-1)(b-1)
Total	rab - 1	$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{r} Y_{ijk}^2 - F.C.$	

$$F.C. = (GranTotal)^2 / pqr$$

Ejemplo Ilustrativo

Probándose el efecto de cuatro variedades de soya (A) y tres épocas de siembra (B) y utilizándose como plan experimental parcelas en franjas los rendimientos en Kilogramos por parcela fueron los siguientes:

Repetición I

	a_1	a_2	a_3	a_4	$Y_{.jk}$
b_1	2.4	2.1	2.2	2.0	8.7
B b_2	2.7	2.6	2.7	2.8	10.8
b_3	1.6	1.5	1.4	1.7	6.2
$Y_{i.k}$	6.7	6.2	6.3	6.5	25.7

Repetición II

a_1	a_2	a_3	a_4	$Y_{.jk}$
2.0	1.9	2.2	2.1	8.2
2.6	2.5	2.5	2.4	10.0
1.2	1.3	1.2	1.1	4.8
5.8	5.7	5.9	5.6	23.0

Ambas Repeticiones

a_1	a_2	a_3	a_4	$Y_{.j.}$		
4.4	4.0	4.4	4.1	16.9	b_1	
5.3	5.1	5.2	5.2	20.8	b_2	B
2.8	2.8	2.6	2.8	11.0	b_3	
12.5	11.9	12.2	12.1		$Y_{i..}$	
					$Y_{...}$=48.7	

Cálculos

Factor de Corrección: $\text{F.C.} = \frac{\sum Y_{...}^2}{\text{rab}} = \frac{48{,}7^2}{(2)(4)(3)} = 98{,}82$

Suma de Cuadrados

Suma de Cuadrados Totales

$$\text{SCT} = 2{,}4^2 + 2{,}1^2 + \ldots + 1{,}1^2 - \text{F.C.} = 105{,}51 - 98{,}82 = 6{,}69$$

Suma de Cuadrados de Repeticiones

$$\text{SCR} = \frac{25{,}7^2 + 23{,}0^2}{4\text{x}3} - \text{F.C.} = 99{,}12 - 98{,}82 = 0{,}30$$

Suma de Cuadrados de Variedades

$$\text{SCA} = \frac{12{,}5^2 + 11{,}9^2 + 12{,}2^2 + 12{,}1^2}{2x3} - \text{F.C.} = 98{,}85 - 98{,}82 = 0{,}03$$

Suma de Cuadrados de E(a)

$$\frac{6{,}7^2 + 6{,}2^2 + ... + 5{,}9^2 + 5{,}6^2}{3} - 98{,}82 - 0{,}03 - 0{,}30 = 99{,}19 - 98{,}82 - 0{,}03 - 0{,}30 = 0{,}04$$

Suma de cuadrados de épocas de siembra

$$\text{SCB} = \frac{16{,}9^2 + 20{,}8^2 + 11{,}0^2}{2x4} - \text{F.C} = 104{,}91 - 98{,}82 = 6{,}09$$

Suma de Cuadrados de Error (b)

$$\text{SCE(b)} = \frac{8{,}7^2 + ... + 4{,}8^2}{4} - \text{F.C.} - \text{SCR} - \text{SCB} = 105{,}26 - 98{,}82 - 0{,}30 - 6{,}09 = 0{,}35$$

Suma de Cuadrados A x B

$$\text{SCAB} = \frac{4{,}4^2 + ... + 2{,}8^2}{2} - \text{F.C.} - \text{SCA} - \text{SCB} = 105{,}00 - 98{,}82 - 0{,}03 - 6{,}09 = 0{,}06$$

Suma de Cuadrados de Error(c)

$$\text{SCE}(c) = 6{,}69 - (99{,}19 - 98{,}82) - (105{,}26 - 98{,}82 - 0{,}30) - 0{,}06 = 6{,}69 - 0{,}37 - 6{,}14 - 0{,}06 = 0{,}12$$

Análisis de Varianza

Vease tabla 11.12 a continuación.

Tabla 11.12. Esquema de analisis de varianza de parcelas en franjas con dos repeticiones

Fuente de V.	G. de L.	SC	CM	F
Variedades (A)	3	0,03	0,01	1 ns
Repeticiones (R)	1	0,30	0,30	
E(a)	3	0,04	0,01	
Epoca(B)	2	6,09	3,045	17,4**
E(b)	2	0,35	0,175	
AxB	6	0,06	0,01	<1 ns
E(c)	6	0,12	0,02	
Total	23	6,69		

Se concluye que no se detectaron diferencia significativa en el término correspondiente a la Interacción Variedad - Epoca. Luego se verifica que tampoco existe efécto de variedad, pero si existen diferencias altamente significativas entre épocas.

Capítulo 12

ANÁLISIS DE REGRESIÓN

DEFINICION DE REGRESIÓN

Es la relación funcional entre una variable dependiente y una o más variables regresoras. Puede ser lineal o no lineal e igualmente se puede categorizar en Regresión Simple, Regresión Parcial y Regresión Múltiple. Si existe una sola variable regresora la regresión es Simple, por el contrario si son varias variables regresoras, la regresión es Múltiple.

La Regresión Lineal Parcial es la relación funcional entre una variable dependiente y una o más variables regresoras, manteniendo fija una o más variables.

En otros casos existe Regresión Multivariada, la cual ocurre cuando hay varias variables dependientes (varios Y).

MODELO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

Sea $(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), (Y_3, X_3), \cdots, (Y_n, X_n)$ una muestra aleatoria bivariada de tamaño n
Se plantea describir la relación fundamental entre X y Y a través del modelo poblacional:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad (12.1)$$

donde Y denota la variable dependiente, X denota la variable independiente.

Y_i y ε_i son variables aleatorias
β_0 y β_1 son parametros del modelo
β_0 representa el intercepto
β_1 representa la pendiente de la recta
X_i es fija o constante
y $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

DISTRIBUCIÓN PROBABILISTICA DE Y_i

Una vez seleccionada la expresión (12.1) como modelo poblacional el problema que se plantea es de estimación de los parámetros de ese modelo. Bajo el supuesto de normalidad de los errores descrito anteriormente resulta de gran importancia para tales fines determinar la distribución probabilística de Y_i, β_0, y β_1.

Esperanza Matemática de Y_i

$$
\begin{aligned}
E(Y_i) &= E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) \\
&= E(\beta_0) + E(\beta_1 X_i) + E(\varepsilon_i) \qquad \text{como } \beta_0 \text{ y } \beta_1 X_i \text{ son constantes} \\
&= \beta_0 + \beta_1 X_i + 0 \\
&= \beta_0 + \beta_1 X_i
\end{aligned}
$$

Varianza de Y_i

$$
\begin{aligned}
V(Y_i) &= V(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) \\
&= V(\beta_0) + V(\beta_1 X_i) + V(\varepsilon_i) \qquad \text{como } \beta_0 \text{ y } \beta_1 X_i \text{ son constantes} \\
&= 0 + 0 + \sigma^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

En resumen:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_i \sim (0, \sigma^2) \\
&Y_i \sim (\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)
\end{aligned}
\qquad (12.2)
$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

El método de los mínimos cuadrados es usado para obtener estimadores de β_0 y β_1 a partir de los datos. El método consiste en seleccionar valores de β_0 y β_1 tal que la suma de cuadrados de las desviaciones de las observaciones de la línea de regresión ,esto es, la función de regresión sea mínima.

Entonces se escogen $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ para minimizar:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

Esta expresión se puede minimizar por varios métodos, uno de los cuales consiste en diferenciar con respecto a β_0 y β_1, igualar a cero y resolver por $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$. Se genera entonces el siguiente sistema de ecuaciones, las cuales son llamadas ECUACIONES NORMALES.

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (12.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

cuya solución es:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \qquad (12.4)$$

o en forma equivalente

$$b_1 = \hat{\beta}_1 = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{SPXY}{SCX}$$

E inclusive, por métodos matriciales se podría realizar de la siguiente manera:

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_2 + \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_n + \varepsilon_n$$

y en forma general

$$\underline{Y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \\ 1 & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

donde

$$\varepsilon = \underline{Y} - \underline{X}\underline{\beta}$$

$$\varepsilon'\varepsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

$$\frac{\partial \varepsilon'\varepsilon}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta = 0$$

luego

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) \qquad (12.5)$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ & \vdots \\ 1 & X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} X_i \\ -\sum_{i=1}^{n} X_i & n \end{pmatrix}}{n \sum^{n} X_i^2 - (\sum^{n} X_i)^2}$$

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 = b_0 \\ \hat{\beta}_1 = b_1 \end{bmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} X_i \\ -\sum_{i=1}^{n} X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix}}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \qquad (12.6)$$

Resolviendo la operación planteada en forma matricial se obtendrá las mismas estimaciones de b_o y b_1 anteriores.

DISTRIBUCIÓN PROBABILISTICA DE $\hat{\beta}_1$

Esperanza de $(\beta_1) = b_1$

$$b_1 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$E(b_1) = E\left\{\frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\right\} = E\left\{\frac{\sum (X_i - \overline{X})Y_i}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\right\}$$

Supongamos $C_i = \dfrac{(X_i - \overline{X})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$

$$E(b_1) = E(\sum C_i Y_i) = E(C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \cdots + C_n Y_n)$$

$$E(b_1) = E(C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \cdots + C_n Y_n)$$

$$E(b_1) = C_1 E(Y_1) + C_2 E(Y_2) + \cdots + C_n E(Y_n)$$

$$E(b_1) = C_1(\beta_0 + \beta_1 X_1) + C_2(\beta_0 + \beta_1 X_2) + \cdots + C_n(\beta_0 + \beta_1 X_n)$$

$$E(b_1) = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} C_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \qquad \sum C_i = \frac{\sum (X_i - \overline{X})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = 0$$

$$E(b_1) = \beta_1 \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

$$E(b_1) = \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum (X_i - \overline{X})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} X_i = \beta_1 \frac{\sum (X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

$$E(b_1) = \beta_1 \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \beta_1$$

$E(b_1) = \beta_1 \qquad \Rightarrow \quad \beta_1$ ES UN ESTIMADOR INSESGADO

Varianza de $\hat{\beta}_1$

$$V(b_1) = V(\sum_{i=!}^{n} C_i Y_i)$$
$$V(b_1) = V(C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \cdots + C_n Y_n)$$
$$V(b_1) = C_1^2 V(Y_1) + C_2^2 V(Y_2) + \cdots + C_n^2 V(Y_n)$$
$$V(b_1) = C_1^2 \sigma^2 + C_2^2 \sigma^2 + \cdots + C_n^2 \sigma^2$$
$$V(b_1) = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma^2 \qquad \sum C_i^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^4}$$
$$V(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma_X^2} = \frac{\text{Varianza de las } Y_i}{\text{Varianza de las X}}$$

DISTRIBUCIÓN PROBABILISTICA DE $\hat{\beta}_0 (b_0)$

Esperanza de $\hat{\beta}_0$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}$$
$$E(b_0) = E(\overline{Y} - b_1 \overline{X}) = E(\overline{Y}) - E(b_1 \overline{X})$$
$$E(b_0) = E(\frac{\sum Y_i}{n}) - \overline{X} E(b_1)$$
$$E(b_0) = E(\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)}{n} - \overline{X}\beta_1$$
$$E(b_0) = \frac{E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n)}{n} - \overline{X}\beta_1$$
$$E(b_0) = \frac{(\beta_0 + \beta_1 X_1) + (\beta_0 + \beta_1 X_2) + \cdots + (\beta_0 + \beta_1 X_n)}{n} - \overline{X}\beta_1$$
$$E(b_0) = \frac{n\beta_0 + \beta_1 \sum X_i}{n} - \overline{X}\beta_1$$
$$E(b_0) = \beta_0 + \overline{X}\beta_1 - \overline{X}\beta_1$$

$E(b_0) = \beta_0$ $\Rightarrow$ β_0 ES UN ESTIMADOR INSESGADO

Varianza de $\hat{\beta}_0$

$$V(b_0) = V(\overline{Y} - b_1\overline{X}) = V(\overline{Y}) + \overline{X}^2 V(b_1)$$

$$V(b_0) = \frac{V(Y_1) + V(Y_2) + \cdots V(Y_n)}{n^2} + \overline{X}^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_X^2}$$

$$V(b_0) = \frac{n\sigma^2}{n^2} + \overline{X}^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_X^2}$$

$$V(b_0) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2})$$

DISTRIBUCIÓN PROBABILISTICA DE $\hat{Y}$

Esperanza de $\hat{Y}$

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_i$$

$$E(\hat{Y}) = E(b_0) + X_i E(b_1)$$

$$E(\hat{Y}) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

$$E(\hat{Y}) = E(Y_i)$$

Varianza de $\hat{Y}$

$$V(\hat{Y}) = V(b_0) + X_i^2 V(b_1)$$

$$V(\hat{Y}) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sigma_X^2}) + X_i^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_X^2}$$

$$V(\hat{Y}) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2 + X_i^2}{\sigma_X^2})$$

$$V(\hat{Y}) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2})$$

En resumen:

$$Y_i \approx (\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$$

$$b_1 \approx (\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2})$$

$$b_0 \approx (\beta_0, \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}))$$

$$\hat{Y}_i \approx (\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{X_i^2 + \overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}))$$

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Las estimaciones anteriormente realizadas permiten obtener a partir de los datos, un modelo de estimación de la forma:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_i$$

conviene indagar sobre lo adecuado de ese modelo estimado para describir la relación entre Y y X. Además, conocida la distribución probalística de los errores, β_0 y β_1 es posible plantear Pruebas de Hipótesis para verificar la adecuación del modelo.

Pruebas de Hipótesis para β_1

En este caso se plantean las siguientes hipótesis nula y alternativa, respectivamente;

$$Ho: \beta_1 = 0$$
$$Ha: \beta_1 \neq 0$$

El estadístico de prueba correspondiente es el siguiente:

$$t_c = \frac{b_1 - \beta_1}{s_{b_1}} = \frac{b_1}{s_{b_1}} = \frac{b_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}}}$$

$$\text{Si } t_c > t_{tab}(\alpha, n-2) \quad \text{Se rechaza Ho.}$$

En este caso el rechazo de la hipótesis nula indicaría la existencia de una relación lineal entre las variables.

Pruebas de Hipótesis para β_0

Las hipótesis planteadas serían:

$$Ho: \beta_0 = 0$$
$$Ha: \beta_0 \neq 0$$

el estadístico de prueba:

$$t_c = \frac{b_0 - \beta_0}{s_{b_0}} = \frac{b_0}{s_{b_0}} = \frac{b_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2})}}$$

$$\text{Si } t_c > t_{tab}(\alpha, n-2) \quad \text{Se rechaza Ho.}$$

el rechazo de la hipótesis nula indicaría que el intercepto tiene un valor diferente a cero.

Intervalos de Confianza

Otra forma equivalente para establecer inferencias estadísticas para el modelo lineal simple es a través de intérvalos de confianza. Se construye un intérvalo de confianza del 100(1-α)% para β_1. Si este intérvalo no incluye el valor cero, entonces es razonable concluir que β_1 es diferente de cero, y que Y y X están en algun grado relacionados en forma lineal. Similarmente se concluye con respecto a β_0, en relación a que si el intérvalo de confianza incluye el cero es indicativo de que el intercepto es el origen de coordenadas y esta conclusión se sostiene con 100(1-α)% de confianza.

Intervalo de Confianza para β_1

$$P\left[b_1 - t_{\frac{\alpha}{2},n-2} s_{b_1} \leq \beta_1 \leq b_1 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2} s_{b_1}\right] = 1 - \alpha$$

Intervalo de Confianza para β_0

$$P\left[b_0 - t_{\frac{\alpha}{2},n-2} s_{b_0} \leq \beta_0 \leq b_0 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2} s_{b_0}\right] = 1 - \alpha$$

Intervalo de Confianza para $\hat{Y}$

$$P\left[\hat{Y}_i - t_{\frac{\alpha}{2},n-2} s_{Y_i} \leq \hat{Y} \leq \hat{Y}_i + t_{\frac{\alpha}{2},n-2} s_{Y_i}\right] = 1 - \alpha$$

ANÁLISIS DE LA VARIANZA

Otra forma de probar hipótesis con referencia a β_1 es el Análisis de la Varianza, comunmente identificado por las siglas ANAVAR, el cual parte de la división de las sumas de cuadrados de la manera que se explicará a continuación.

División de la Varianza

$$(Y_i - \overline{Y}) = (Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \overline{Y})$$
$$\sum (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2$$
$$\text{SCTOTAL} = \text{SCRESIDUAL} + \text{SCREGRESION}$$

ANAVAR

F. de V.	G. de L.	S.C.	C.M.	F
Regresión	1	$\sum (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2$	SCREG/1	Fc=CMREG/CMRES
Residual	n-2	SCT - SCREG	SCRES/(n-2)	
Total	n-1	$\sum (Y_i - \overline{Y})^2$		

Las hipótesis aquí planteadas son:

$$\text{Ho}: \beta_1 = 0$$
$$\text{Ha}: \beta_1 \neq 0$$

Si $Fc > Ft\,(1, n\text{-}2, \alpha)$ se rechaza Ho. Esta es la misma hipótesis que se probó anteriormente usando el estadístico t de Student.

EN FORMA MATRICIAL

$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$

$\underline{\hat{Y}} = X\underline{\hat{\beta}}$

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$ donde $Y \sim (X\underline{\beta}, \sigma^2 I)$ $\quad \varepsilon \sim (0, \sigma^2 I)$

$E(\hat{\beta}) = E\left[\ (X'X)^{-1}(X'Y)\ \right] = (X'X)^{-1}X'E(Y)$

$E(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'(X\underline{\beta})$

$E(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}(X'X)\underline{\beta} \ = I\underline{\beta}$

$E(\hat{\beta}) = I\underline{\beta}$

Se usa un procedimiento similar para el caso de la varianza.

$V(\hat{\beta}) = V\left[X'X)^{-1}(X'Y)\right] = (X'X)^{-1}X'V(Y)$

$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I$ donde $(X'X)^{-1}X'$ es una forma cuadratica

$V(\hat{\beta}) = \sigma^2\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix}$ donde $\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix}$ es la Matriz Varianza - Covarianza

donde $C_{00}\sigma^2 = V(b_0)$

$C_{11}\sigma^2 = V(b_1)$

$C_{10} = C_{01} = 0$ para que b_1 y b_0 sean independientes

Se conoce que:

$$(X'X)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} X_i \\ -\sum_{i=1}^{n} X_i & n \end{pmatrix}}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$

Ortogonalizando, se obtiene una matriz de la forma:

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{\overline{X}^2}{\sum(X_i - \overline{X}^2)}}, & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sum(X_i - \overline{X})^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(b_o) & 0 \\ 0 & V(b_1) \end{bmatrix}$$

Obteniendose de esta forma las mismas estimaciones de $V(b_0)$ y $V(b_1)$ anteriores.

En resumen:

$E(\hat{\beta}) = \underline{\beta}$

$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}\sigma^2$

$E(\hat{Y}_i) = E(X\hat{\beta}) = X\underline{\beta}$

$V(\hat{Y}) = V(X\hat{\beta}) = X^* V(\hat{\beta}) = X'(X'X)^{-1}X\sigma^2$ $\quad$ X^* es una forma cuadratica de X

Por ende,

$V(\hat{Y}_u) = X'_u (X'X)^{-1} X_u \sigma^2$ $\quad$ esto es, en cada u fila hay una estimacion

En forma similar se puede construir una tabla que resuma el Análisis de la Varianza en una Regresión Lineal Simple, en forma matricial.

F. de V	G. de L.	S.C.
Regresión	1	$\hat{\beta}X'Y - n\overline{Y}^2$
Residual	n - 2	$Y'Y - \hat{\beta}X'Y$
Total	n - 1	$Y'Y - n\overline{Y}^2$

Donde $Fc = \dfrac{CMREG}{CMRES} = \dfrac{\hat{\beta}X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - \hat{\beta}X'Y}$

Si $Fc > Ftab(1, n - 2)$ Se rechaza Ho $\rightarrow$ Si Hay Regresion Lineal Simple.

BONDAD DE AJUSTE

Se puede calcular por varios estadísticos:

1.- Coeficiente de Correlación

$$r = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^2 \sum (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

2.- Coeficiente de determinación

$$R^2 = r^2$$

$$R^2 = \frac{SCREG}{SCTOTAL} = \frac{\hat{\beta}X'Y - n\overline{Y}^2}{Y'Y - n\overline{Y}^2}$$

Ademas

$$R^2 = \frac{SCTOTAL - SCE}{SCTOTAL} = 1 - \frac{SCE}{SCTOTAL}$$

Los valores que toma están siempre en un intervalo $0 \leq R^2 \leq 1$ ya que $0 \leq SCE \leq$ SCTotal. De manera ideal se desea tener un $R^2 = 1$, en cuyo caso SCE = 0 y toda la variación presente en las observaciones puede explicarse por la presencia lineal de X en la ecuación de regresión. De manera que, entre más cercano se encuentre R^2 a uno, mayor es el grado de asociación lineal que existe entre X e Y.

Si se designa la suma de Productos cruzados como SP_{XY} y las varianzas de X e Y respectivamente como s^2_X y s^2_Y entonces se tiene:

$$R^2 = \frac{{SP_{XY}}^2}{s^2_X \quad s^2_Y} = \frac{b_1 SP_{XY}}{s^2_Y} = \frac{SCREG}{SCTOTAL} x100$$

R^2 mide el porcentaje de variabilidad total de Y que es explicada por la regresión.

DETERMINACION DEL MODELO

El modelo: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, cuando hay repeticiones en cada punto, puede escribirse de la siguiente manera:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i + \text{Falta de Ajuste}$$

Haciendo una división de los errores, se obtiene:

$$(Y_{ij} - \overline{Y}..) = (Y_{ij} - \overline{Y}_i.) + (\overline{Y}_i. - \overline{Y}..)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(Y_{ij} - \overline{Y}..)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(Y_{ij} - \overline{Y}_i.)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(\overline{Y}_i. - \overline{Y}..)^2$$

ERROR TOTAL = ERROR EXPERIMENTAL + ERROR DEL TRATAMIENTO

Pero si se está interesado en $(Y_{ij} - \hat{Y}_i)$ se puede realizar la siguiente subdivisión:

$$(Y_{ij} - \overline{Y}_i. + \overline{Y}_i. - \hat{Y}_i)^2 = (Y_{ij} - \overline{Y}_i.)^2 + (\overline{Y}_i. - \hat{Y}_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(Y_{ij} - \hat{Y}_i.)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(Y_{ij} - \overline{Y}_i.)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(\overline{Y}_i. - \hat{Y}_i)^2$$

RESIDUAL = FALTA DE AJUSTE + ERROR PURO O ERROR EXPERIMENTAL

como $\sum_{j=1}^{r} \text{constante} = r.\text{constante}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(Y_{ij} - \hat{Y}_i.)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(Y_{ij} - \overline{Y}_i.)^2 + r\sum_{i=1}^{n}(\overline{Y}_i. - \hat{Y}_i)^2$$

Si existe diferente número de repeticiones en cada punto se tiene PARA CADA PUNTO:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_1}(Y_{ij}-\hat{Y}_i.)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_1}(Y_{ij}-\overline{Y}_i.)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_1}(\overline{Y}_i.-\hat{Y}_i)^2$$

Por ejemplo; sean los siguientes puntos:

Y_{ij}	X_i
Y_{11}	X_1
Y_{12}	X_1
Y_{13}	X_1
Y_{21}	X_2
Y_{22}	X_2
Y_{23}	X_2

$$SCEP_1=\sum_{j=1}^{r_1}(Y_{1j}-\overline{Y}_1.)^2 \quad \text{con } r_1-1 \text{ grados de libertad}$$

$$SCEP_2=\sum_{j=1}^{r_2}(Y_{2j}-\overline{Y}_2.)^2 \quad \text{con } r_2-1 \text{ grados de libertad}$$

$$\vdots$$

$$SCEP_n=\sum_{j=1}^{r_j}(Y_{nj}-\overline{Y}_n.)^2 \quad \text{con } r_j-1 \text{ grados de libertad}$$

$$SCEP_1+SCEP_2+\cdots+SCEP_n=SCEP$$

Se genera entonces el siguiente análisis de la varianza:

ANAVAR

F. de V.	G. de L.	S.C.	C.M.	F
Regresión	1	$\sum\sum(\hat{Y}_i.-\overline{Y}..)^2$	CMREG	F_2=CMREG/CMEP
Residual:				
Falta de Ajuste	Diferencia	$\sum\sum(\overline{Y}_i.-\hat{Y}_i)^2$	CMFA	F_1=CMFA/CMEP
Error Puro	$\Sigma(r_j-1)$	$\sum\sum(Y_{ij}-\overline{Y}_i.)^2$	CMEP	
Total	n-1	$\sum(Y_{ij}-\hat{Y}_i.)^2$		

Si F_1 es significativo, indica que existe Falta de Ajuste o Sesgo; lo cual conduce a afiemar que el modelo es INCORRECTO.

Si F_1 no es significativo, se realiza un POOL de los errores, y ese sería el denominador apropiado para realizar la prueba de hipótesis para Regresión, en cuyo caso F_2 = CMREG/CMRES.

EL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE

En los trabajos de investigación es necesario emplear técnicas estadísticas que permitan interpretar los resultados y de esta forma poder llegar a conclusiones valederas que permitan al investigador aceptar o rechazar las hipótesis planteadas inicialmente e inclusive formular nuevas hipótesis, una de esas técnicas estadísticas de gran utilidad en los investigadores es el análisis de regresión, el cual es necesario cuando se quiere encontrar relaciones entre las variables o establecer ecuaciones de predicción.

Mallows (1973), menciona los siguientes usos de la ecuación de regresión:

a.- Descripción
b.- Predicción y estimación
c.- Extrapolación
d.- Estimación de parámetros
e.- Control
f.- Construcción del modelo.

El Análisis de Regresión requiere el cumplimiento de una serie de supuestos necesarios para su aplicación siendo estos de gran importancia para evitar conclusiones erradas. Dichos supuestos han sido ampliamente discutidos por muchos autores (Linares y Chacín, 1986).

Estos supuestos serían resumidamente:

a.- Homogeneidad de la varianza de errores
b.- Normalidad de los errores
c.- Independencia
d.- Aditividad de los efectos.

Para el estudio del cumplimiento de los supuestos y alternativas de soluciones se tendrá que realizar algunos análisis como serían:

a.- Examen de residuales
b.- Estudios y análisis de autocorrelación
c.- Estudio y análisis de la multicolinealidad.

Estos procedimientos han sido ampliamente discutidos por muchos autores, entre ellos Linares y Chacín (1986), Chacín y Meneses (1984), y Chacín (1998).

En la investigación agrícola cuando el investigador mide el efecto que pueda producir determinado tratamiento sobre algunas características particulares que son de su interés (rendimiento, número de frutos, grosor del tallo, diámetros de la copa, etc.), no descarta la posibilidad de que pueda existir alguna relación o asociación entre una variable dependiente y algunas variables independientes o regresoras que en algunos casos son controladas y en otras aleatorias o ambos casos.

Por ejemplo, en un ensayo con cítricas en el que se evalúa la dosificación de Nitrógeno (N), Fósforo(P) y Potasio (K), se podría establecer un modelo que relacione al rendimiento con las variables regresoras (N, P, K), en este caso, estas variables regresoras son controladas pero también se podría establecer relaciones entre el rendimiento con número de frutos, grosor del tallo y diámetro de la copa, que son variables aleatorias e inclusive establecer la relación del rendimiento con ambos tipos de variables. El análisis de regresión permitirá estudiar esas relaciones con el fin de llegar a conclusiones de interés para los investigadores.

Graybill (1961), expresa que uno de los propósitos de la ciencia es describir y predecir los eventos en el mundo en que vivimos y una forma es mediante modelos que relacionen cualidades del mundo real. Chacín y Meneses (1984) y Cobo (1976), señalan algunas ideas expresadas por Bunge, Kempthorne, Federer, Gill, Fisher, Neter y Graybill. Una relación funcional entre grupos de eventos en el mundo real es un modelo y aunque la relación no sea exacta sino aproximada es invalorable la predicción, por consiguiente cuando se dice que una relación funcional existe entre un grupo de variables es en forma muy aproximada.

La función del modelo es simular el comportamiento de un sistema bajo ciertas condiciones. La simulación puede encontrarse mediante un modelo matemático que puede ser una ecuación o un sistema de ecuaciones que representan

cuantitativamente la hipótesis formulada en relación al sistema bajo consideración y que envuelve variables aleatorias y parámetros. Si la ecuación es lineal en los parámetros el modelo se convierte en un modelo lineal, dentro de estos modelos, el modelo de regresión lineal es uno de los mas importantes.

DESCRIPCION DE LOS DATOS Y DEL MODELO

Los datos consisten de n observaciones sobre una variable dependiente Y y de p variables independientes $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Las observaciones son usualmente presentadas de la siguiente manera:

Observaciones	Y	X_1	X_2	X_3	...,	X_p
1	Y_1	X_{11}	X_{21}	X_{31}	...,	X_{p1}
2	Y_2	X_{12}	X_{22}	X_{32}	...,	X_{p2}
3	Y_3	X_{13}	X_{23}	X_{33}	...,	X_{p3}
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
n	Y_n	X_{1n}	X_{2n}	X_{3n}	...,	X_{pn}

Las relaciones entre la variable Y con las variables X_1, X_2, X_3, ..., X_p se formula por el modelo lineal general de regresión de la siguiente forma:

$$Y = X\beta \quad + \varepsilon \qquad (12.7)$$

Y = vector (nx1) de respuesta.
X = matriz (nxp) de variables independientes
β = vector (px1) de constantes desconocidas
ε = vector (nx1) aleatorio de errores supuestos.

donde: $E(\varepsilon) = 0$ y $\quad E(\varepsilon\,\varepsilon') = \sigma^2 I_n \quad V(\varepsilon) = \sigma^2$

Expandiendo la expresión matricial del modelo se tiene:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi} + \varepsilon_i \qquad (12.8)$$

Los valores de X_i son fijos para $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Las constantes $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ son los coeficientes de regresión, los cuales en su expresión clásica son interpretados como el incremento en la variable Y que se corresponde a una unidad de incremento en X_i cuando las otras variables se mantienen constantes.

Los coeficientes β_i son estimados haciendo mínimo la suma de cuadrados de residuales, lo cual es conocido como el método de los mínimos cuadrados. Formalmente, el método consiste en minimizar la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i} - \dots - \beta_p X_{pi})^2 \quad (12.9)$$

donde las ecuaciones normales para los estimadores mínimos cuadrados serían:

$$(X'X)\beta = X'Y \quad (12.10)$$

Este sistema tiene solución única si y solo si la matriz $X'X$ tiene inversa.

$$(X'X)^{-1}(X'X)\hat{\beta} = (X^1X)^{-1}X^1Y \quad (12.11)$$

con lo cual se tiene:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \quad (12.12)$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \dots & X_{p1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \dots & X_{p2} \\ 1 & X_{13} & X_{23} & \dots & X_{p3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \dots & X_{pn} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Si se obtiene la matriz $(X'X)^{-1}$, y la llamamos C, entonces se puede denotar al elemento C_{jj} donde j = 1, 2, ... , p, en la suma de productos y cuadrados corregidos.

$$(X'X)^{-1} = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1j} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2j} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{i1} & & \cdots & C_{ij} \end{bmatrix} \quad i, j = 1, 2, ..., p$$

la varianza del estimador mínimo cuadrado será:

$$V(\hat{\beta}_j) = C_{jj}\sigma^2 \tag{12.13}$$

Supuestos del Modelo Poblacional

Sea el modelo lineal general;

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi} + \varepsilon_i$$

a.- Homogeneidad de varianza de errores:

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2 I)$, con $E(\varepsilon_i) = 0$

y $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$

b.- Independencia de errores:

$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \qquad i \neq j$

c.- Homogeneidad de Varianza de las observaciones:

c.1.- $E(Y_i) = E(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi})$

debido a que $E(\varepsilon_i) = 0$

c.2.- $V(Y_i) = V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ debido a que:

$$V(\beta_0) = V(\beta_1 X_{1i}) = V(\beta_2 X_{2i}) = \ldots = V(\beta_p X_{pi}) = 0$$

d.- Independencia de los Y_i :

$$Cov\,(Y_i , Y_j) = 0 \qquad i \neq j$$

Los supuestos de Y_i son consecuencia de los supuestos de ε_i, ya que este término es el que transforma a Y_i en la variable aleatoria y toda función de variable aleatoria es también aleatoria.

e.- Aditividad de los efectos:

Esta aditividad de los efectos aparece intrínseca en la expresión del modelo

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Este procedimiento es básico para el desarrollo de los estimadores del Modelo de Regresión y por supuesto para la Metodología de la Superficie de Respuesta (MSR), ya que a través de la MSR se generan modelos de regresión. Fundamentalmente en la MSR se está interesado en obtener una respuesta η, la cual es una función de k variables independientes que sería de la forma siguiente:

$$\eta = f(X_1, X_2, \ldots, X_k) \qquad (12.14)$$

La forma η es usualmente desconocida o muy compleja; es necesario aproximarla mediante un polinomio de bajo orden. Por ejemplo si se tiene tres variables (X_1, X_2, X_3) el modelo resumido sería:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{33} X_3^2 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{23} X_2 X_3 + \varepsilon \qquad (12.15)$$

donde $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_{23}$, son coeficientes de regresión, Y es la variable respuesta y ε es el error experimental. Las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son cuantitativas y medidas en escala continua.

Suponiendo que la función f en la ecuación (12.14) es aproximadamente un modelo lineal en los X. Se asume que esta aproximación es adecuada, aunque la discusión general siguiente, puede ser alterada fácilmente para ser consistente con una aproximación de alto orden. Suponiendo que varios tratamientos son considerados como varias combinaciones de los X, los datos son escritos en la forma siguiente:

$$\begin{array}{llll} Y_1 & X_{11} & X_{21}, \ldots, & X_{k1} \\ Y_2 & X_{12} & X_{22} & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n & X_{1n} & X_{2n} & X_{kn} \end{array}$$

donde n $>$ k. La combinación actual de niveles experimentales en los X es llamado el diseño experimental. El modelo que fue asumido por el experimentador puede ser escrito como:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi} + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

donde ε_i es una variable aleatoria. Se asume que el ε_i es independiente, con media cero y varianza σ^2, esto es en términos del siguiente vector de errores:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

donde: $E(\varepsilon) = 0$ y $E(\varepsilon\, \varepsilon') = \sigma^2 I_n$ $V(\varepsilon) = \sigma^2$. El modelo de la ecuación (12.15) puede ser escrito muy convenientemente en la forma:

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad (12.16)$$

donde:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}$$

El modelo de la ecuación (12.16) se refiere al modelo lineal general. El lector puede realmente observar que el modelo lineal general es fácilmente aplicable a modelos polinomiales, mayores a los de primer orden. Por ejemplo, supóngase que el modelo asumido es un modelo cuadrático en dos variables, esto es, la respuesta en el i-ésimo tratamiento envuelve los niveles (X_{1i}, X_{2i}) es dada por la siguiente expresión:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_{11} X_{1i}^2 + \beta_{22} X_{2i}^2 + \beta_{12} X_{1i} X_{2i} + \varepsilon_i \tag{12.17}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n > 6$. La matriz X y el vector β pueden ser escritos así:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & X_{11}^2 & X_{21}^2 & (X_{11} . X_{21}) \\ 1 & X_{12} & X_{22} & X_{12}^2 & X_{22}^2 & (X_{12} . X_{22}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & X_{1n}^2 & X_{2n}^2 & (X_{1n} . X_{2n}) \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix}$$

La atención se centra en la estimación de los parámetros del vector β. El método de los mínimos cuadrados es un procedimiento de estimación útil particularmente para modelos de la forma de la ecuación (12.16).

Dada la matriz X, una función de los niveles preseleccionados, y el vector Y de respuesta; el método de los mínimos cuadrados utiliza como estimador de β al vector que resulta en un valor mínimo de L, calculado de la siguiente manera:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon' \varepsilon$$

La suma de los cuadrados de los errores o desviaciones a partir de la respuesta observada para el valor estimado L puede ser escrito así:

$$L = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \tag{12.18}$$

entonces:

$$\begin{aligned} L &= Y'Y - (X\beta)'Y - Y'X\beta + (X\beta)'X\beta \\ &= Y'Y - \hat{\beta}'X'Y - Y'X\beta + \beta'X'X\beta \\ &= Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta \end{aligned} \tag{12.19}$$

Para encontrar $\hat{\beta}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -2X'Y + 2(X'X)\beta$$

igualando a cero:

$$(X'X)\hat{\beta} = X'Y \tag{12.20}$$

Asumiendo que $X'X$ es una matriz no singular, se tendrá que:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \tag{12.21}$$

Las ecuaciones dadas por (12.20) son llamadas **ecuaciones normales** para la estimación de β. Para el modelo de regresión de primer orden de la ecuación (12.16) estas ecuaciones son:

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ & & \sum X_{2i}^2 & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ & & & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ki}Y_i \end{bmatrix} \qquad (12.22)$$

Sesgo y Varianza de los Estimadores Mínimos Cuadrados

Considerando el modelo de regresión $Y = X\beta + \varepsilon$, el estimador de β será:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$
$$E(\hat{\beta}) = E\left\{ (X'X)^{-1}\left[X'(X\beta + \varepsilon) \right]\right\}$$
$$E(\hat{\beta}) = \beta + E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon \right]$$

Si la $E(\varepsilon_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon \right] = 0$$
$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

Esto implica que cada uno de los elementos de $\hat{\beta}$ son estimadores insesgados de β.

En el desarrollo del Diseño de Experimentos aplicado a la Metodología de Superficie de Respuesta es conveniente investigar las características de la matriz varianza-covarianza de $\hat{\beta}$, estas serían:

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'$$
$$= \mathrm{Cov}\left[(X'X)^{-1}X'Y \right]$$

Si se considera que $(X'X)^{-1}X'$ contiene solo valores fijos y $\text{Cov}Y = \sigma^2 I_n$, se obtiene:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}) = \left[(X'X)^{-1}X'\right] \sigma^2 I_n \left[(X^{1}X)X^{-1}\right]'$$

realizando la simplificación correspondiente

$$\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \left[(X'X)\right]^{-1} \tag{12.23}$$

Esta ecuación (12.23) es muy importante, ya que implica que la varianza de los estimadores en $\hat{\beta}$ está dada por los elementos de la diagonal de la matriz $(X'X)^{-1}$ multiplicando cada término por σ^2 y los elementos que se encuentran fuera de la diagonal principal multiplicados por σ^2 son las covarianzas.

$$\text{Cov}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ & & \sum X_{2i}^2 & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ & & & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}^{-1} \sigma^2$$

PRUEBA DE HIPÓTESIS EN EL MODELO DE REGRESIÓN

Para la realización de las pruebas de hipótesis es necesario establecer los siguientes supuestos:

a.- $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$

b.- Los Yi son funciones lineales de los ε_i, de modo que también se distribuyen normalmente.

c.- $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$

Para este caso, la matriz X tiene rango p, donde p = k + 1 y k es el número de variables independientes del modelo, el esquema de análisis de la varianza está dado en la Tabla 12.1.

Tabla 12.1 Análisis de la varianza para el modelo de regresión

F. de V.	G. de L.	S. de C.	C.M.
Regresión	p	$\hat{\beta}'X'Y$	$\hat{\beta}'X'Y / p$
Residual	n - p	$Y'Y - \hat{\beta}X'Y$	$(Y'Y - \hat{\beta}X'Y) / (n-p)$
Total	n	$Y'Y$	

En el caso de un modelo de regresión polinomial, el investigador estaría más interesado en realizar una partición adicional del modelo de regresión. Suponga por ejemplo, un modelo de una función de regresión polinomial cuadrática, en este caso es necesario dividir la suma de cuadrados de la regresión en los efectos lineales, cuadráticos e interacciones de primer orden de los estimadores de los parámetros, con el objeto de explorar la significación de cada uno de los efectos.

Para ilustrar los cálculos necesarios en la construcción de la Tabla 12.1 considere el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon_i$$

y la siguiente transformación:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 (X_{1i} - \overline{X}_1) + \beta_2 (X_{2i} - \overline{X}_2) + \ldots + \beta_k (X_{ki} - \overline{X}_k) + \varepsilon_i$$

donde los $\overline{X}_j$ son los valores promedios de los X_j en la muestra, donde $j = 1, 2, ..., k$.

Si se realiza la estimación;

$$\text{Cov}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1k} \\ & & S_{22} & \cdots & S_{2k} \\ & & & & \vdots \\ & & & & S_{kk} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ S_{1Y} \\ \vdots \\ S_{kY} \end{bmatrix} \qquad (12.24)$$

donde S_{11} es la suma de cuadrados corregidos de la columna de los X_1;

$$S_{11} = \sum_{i=1}^{n} (X_{1i} - \overline{X}_1)^2$$

La suma de productos entre X_i y X_j, por ejemplo serían para X_1 y X_2

$$S_{12} = \sum_{i=1}^{n} (X_{1i} - \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2)$$

Los términos serían S_{iY} serían productos entre los X_i y los Y, por ejemplo; para X_1 y Y

$$S_{1Y} = \sum_{i=1}^{n} (X_{1i} - \overline{X}_1)(Y_i - \overline{Y})$$

y el estimador $\hat{\beta}_o$ sería:

$$\hat{\beta}_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \overline{Y}$$

para los estimadores $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, ..., $\hat{\beta}_k$

$$\text{Cov}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1k} \\ & S_{22} & \cdots & S_{2k} \\ & & & \vdots \\ & & & S_{kk} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{1Y} \\ S_{2Y} \\ \vdots \\ S_{kY} \end{bmatrix}$$

El análisis de la Varianza con la partición de los grados de libertad para la regresión sería la siguiente:

Tabla 12.2. Análisis de Varianza del Modelo de Regresión de primer orden

Fuentes de Variación	G. de L.	S. de C
Regresión debido a $\hat{\beta}_o$	1	$n\overline{Y}^2$
Regresión de $X_1, X_2, .., X_n$	k	$\beta_1 S_{1Y} + \beta_2 S_{2Y} + ... + \beta_k S_{kY}$
Residual	n - k - 1	diferencia
Total	n	$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$

Un cuadro similar puede construirse para el caso de la regresión cuadrática.

ESTIMADOR DE σ^2

Inherente al problema de regresión, es importante encontrar el estimador de la varianza del error o residual. Se describirá este estimador en base al modelo lineal general ya descrito y de la siguiente manera;

$$\begin{aligned} SC\,Residual &= Y'Y - \hat{\beta}'X'Y \\ &= Y'Y - \left[(X'X)^{-1}X'Y\right]' X'Y \\ &= Y'Y - Y'X(X'X)^{-1}X'Y \\ &= Y'\left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]Y \end{aligned}$$

Se nota que SCResidual es una forma cuadrática de los $Y's$ cuya matriz sería:

$$P = I_n - X(X'X)^{-1}X'$$

Si se considera el valor esperado de la SCResidual y se sustituye;

$$\begin{gathered} Y = X\beta + \varepsilon \\ E(Y'PY) = E(\varepsilon' P\varepsilon) \\ E(\varepsilon' P\varepsilon) = \sigma^2 \text{Traza } P \end{gathered}$$

la traza de **Ip** es p, por lo tanto;

$$\begin{aligned} \text{TrX}(X'X)^{-1}X' &= \text{Tr } X'X(X'X)^{-1} \\ &= \text{Tr } I_p = p \end{aligned}$$

y resulta

$$\text{Traza } P = \text{Traza } (I_n - X(X'X)^{-1}X')$$
$$\text{Traza } P = n - p$$
$$E(SC\,Residual) = \sigma^2 (n - p)$$

Si se calcula el cuadrado medio del Residual

$$CMRes = \frac{SC\,Residual}{n - p}$$

este es un estimador insesgado de σ^2.

El valor del estadístico F para la prueba de hipótesis sería entonces:

$$Fcalc = \frac{CM\,Regresion}{CM\,Residual}$$

$$p = k + 1$$
$$k = \text{N}^{\circ} \text{ de Variables Independientes}$$
$$Ftab = F_{k,n-p}$$

USOS DE LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN

Una ecuación de regresión puede tener muchos usos, los cuales se podrían resumir en los siguientes:

Descripción y construcción de modelos

Una ecuación de regresión puede ser usada para describir procesos que forman parte de un sistema complejo e interactuante. El propósito de la ecuación puede ser puramente descriptivo, a objeto de explicar la naturaleza de esta interacción compleja. En este sentido se presentan dos necesidades antagónicas a saber: una es explicar la mayor cantidad de variación como sea posible, esto sugiere la inclusión de un número elevado de variables en el modelo, la otra posición es adherirse al principio del menor número de variables, el cual sugiere que se deben tratar de entender en forma fácil la descripción de los procesos con tan pocas variables como sea posible.

En situaciones en los que la descripción es el principal objetivo, se debe tratar de seleccionar la menor cantidad de variables independientes que expliquen la mayor cantidad de variación de la variable dependiente.

Estimación y predicción

Las ecuaciones de regresión pueden ser usadas para predicción, por ejemplo, se podría estar interesado en predecir el valor de una futura observación o estimar la respuesta media que se corresponde con una determinada observación.

Tanto la predicción como la estimación se hacen dentro del rango o rangos de las variables independientes presentes en el modelo. Cuando una ecuación de regresión es usada con estos fines, las variables se seleccionan bajo el criterio de minimizar el cuadrado medio del error de la predicción.

Control

El propósito de construir la ecuación de regresión podría ser determinar la magnitud a la cual las variables independientes se debe alterar, para obtener un valor específico de la variable respuesta. En este punto la ecuación de regresión es vista como una función de respuesta. Para propósito de control, es deseable

que los coeficientes de regresión de las variables sean medidas en forma bastante precisa, esto es, que los errores estándar de los coeficientes sean pequeños.

Es de hacer notar que el propósito para el cual el modelo de regresión fue construido determina el criterio que debe ser optimizado en su formulación; esto supone que un subconjunto de variables puede ser el mejor para un propósito, pero no necesariamente será el mejor para otro. El concepto del mejor subconjunto de variables a ser incluidos en una ecuación de regresión siempre requiere de un análisis adicional.

CRITERIOS PARA SELECCIONAR ECUACIONES DE REGRESIÓN

Existen dos posiciones por parte de los investigadores en relación al conjunto de variables independientes que deben formar parte de la ecuación de regresión, estas son:

* Incluir el mayor número posible de las variables predictoras, que contienen la mayor información sobre las variables que puedan influenciar la respuesta, a objeto de que los valores ajustados sean los más confiables y seguros con fines de predicción.

* Incluir en el modelo solamente las variables de mayor relevancia en el fenómeno bajo estudio, ya que en la mayoría de los casos es impráctico u oneroso recabar información no necesaria y procesarla y además porque la varianza de las predicciones aumenta al aumentar el número de variables regresoras.

La posición conciliadora entre las dos, parece ser la que ha dado mejores resultados y es la que muchos autores han llamado "la mejor ecuación de regresión" o "la ecuación mas adecuada". A este respecto Hocking (1976), señala que cuando se trata de determinar la ecuación más apropiada, basada en un subconjunto de variables, se deben tener en cuenta tres aspectos:

a.- El criterio utilizado para analizar y seleccionar el subconjunto.
b.- La estimación de los coeficientes de la ecuación final.

c.- La técnica computacional usada en el análisis de los datos.

En la literatura se han propuesto varios criterios para seleccionar la mejor ecuación de regresión. Hocking (1976), señala una lista bastante extensa de criterios a saber:

1.- El cuadrado del coeficiente de correlación múltiple o coeficiente de determinación.

$$R_p^2 = \frac{SCR_p}{SCT}$$

SCR = Suma de Cuadrados debida a regresión
SCT = Suma de Cuadrados Total.

2.- El coeficiente de determinación ajustado.

$$R_{adj}^2 = 1 - \left[\frac{(n-1)(1-R_p^2)}{n-p}\right]$$

3.- El cuadrado medio de residuales.

$$CME_p = \frac{SCE_p}{n-p}$$

4.- El cuadrado del error total o estadístico C_p de Mallows.

$$C_p = \frac{SCE_p}{\sigma^2} + (2p-n)$$

5.- Promedio de la varianza de predicción.

$$J_p = \frac{(n+p)}{n} CME_p$$

6.- Promedio del cuadrado medio del error de predicción.

$$S_p = \frac{CME_p}{(n-p-1)}$$

7.- Suma de cuadrados de residuales estandarizada.

$$SCE_p^* = \varepsilon'_p D_p^{-1} \varepsilon_p$$

8.- Suma de cuadrados de predicción .

$$Press_p = \varepsilon'_p D_p^{-2} \varepsilon_p$$

9.- Correlaciones parciales.

10.- Estadísticos de Andrews y Pregiben.

11.- Suma de mínimos errores absolutos ponderados.

12.- Criterios de F parcial y F secuencial.

13.- Uso de parámetros infinitos.

14.- Suma de mínimos errores absolutos.

15.- Suma de mínimos errores relativos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO DE REGRESIÓN MÚLTIPLE

En el siguiente cuadro se presentan los datos correspondientes a capacidad de intercambio catiónico (Y), % de carbono orgánico (X_1) y % de arcilla (X_2) en 20 muestras de suelo.

Muestra	Y	X_1	X_2
1	21,80	2,69	24,00
2	26,07	2,03	35,80
3	19,77	2,72	20,83
4	28,09	2,80	31,00
5	38,84	3,73	29,00
6	29,60	2,99	57,60
7	32,42	0,66	8,73
8	31,01	0,98	13,68
9	24,64	1,42	29,30
10	28,45	3,62	29,43
11	29,03	3,29	40,20
12	24,29	2,36	35,80
13	8,13	1,26	17,00
14	12,11	1,55	15,20
15	16,96	2,55	20,40
16	18,20	2,11	27,40
17	11,30	1,20	15,03
18	17,32	1,97	27,70
19	33,88	2,14	52,80
20	33,50	2,05	35,10
Totales	485,41	44,13	566,20
Promedios	24,2705	2,2065	28,3100

Suma de Cuadrados corregidas

Y	X_1	X_2
1329,709	14,1063	2957,058

Suma de productos

YX_1	YX_2	X_1X_2
48,7158	924,262	109,5244

1.- Modelo Poblacional planteado.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

2.- Supuestos del modelo

$$Y_i \sim (\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i}, \quad \sigma^2)$$

Los Xi son fijos.

$$\varepsilon_i \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$$

3.- Hipótesis

3.1 Anavar

Ho: $\beta_1 = \beta_2 = 0$

Ha: $\beta_i \neq 0$

3.2 Pruebas de t

Ho: $\beta_1 = 0$

Ha: $\beta_1 \neq 0$

$$t_1 = \frac{b_1 - \beta_1}{s_{b_1}}$$

Ho: $\beta_2 = 0$

Ha: $\beta_2 \neq 0$

$$t_2 = \frac{b_2 - \beta_2}{s_{b_2}}$$

Ho: $\beta_0 = 0$

Ha: $\beta_0 \neq 0$

$$t_3 = \frac{b_0 - \beta_0}{s_{b_0}}$$

3.3 Matriz Varianza-Covarianza del modelo de estimación

$$S^2 = \begin{bmatrix} V(b_0) & Cov(b_0,b_1) & Cov(b_0,b_2) \\ Cov(b_0,b_1) & V(b_1) & Cov(b_1,b_2) \\ Cov(b_0,b_2) & Cov(b_1,b_2) & V(b_2) \end{bmatrix}$$

4.- Pruebas de significación

4.1 Análisis de Varianza

F. de V.	G. de L.	S. de C.	C.M.
Regresión	k	$\sum b_i SP_{YX_i}$	SCReg/k
Residual	n - k - 1	Diferencia	SCResidual/(n - k - 1)
Total	n - 1	$\sum (Y-\overline{Y})^2$	

4.2 Cálculo de los coeficientes de regresión

4.2.1 Método aritmético simple

4.2.1.a Cálculo de los coeficientes de correlación simple

$$r_{Y.1} = \frac{SP_{YX_1}}{\sqrt{SC_Y \quad SC_{X_1}}} \qquad r_{Y.2} = \frac{SP_{YX_2}}{\sqrt{SC_Y \quad SC_{X_2}}} \qquad r_{1.2} = \frac{SP_{X_1X_2}}{\sqrt{SC_{X_1} \quad SC_{X_2}}}$$

4.2.1.b Cálculo de los coeficientes de regresión parcial

$$b_{Y_{1.2}} = \frac{r_{Y.1} - r_{Y.2} \quad r_{1.2}}{1 - r_{1.2}^2} \qquad b_{Y_{2.1}} = \frac{r_{Y.2} - r_{Y.1} \quad r_{1.2}}{1 - r_{1.2}^2}$$

4.2.1.c Establecimiento del modelo

$$Y = \overline{Y} + b_{Y1.2}\frac{\sqrt{SCY}}{\sqrt{SCX_1}}(X_1 - \overline{X}_1) + b_{Y2.1}\frac{\sqrt{SCY}}{\sqrt{SCX_2}}(X_2 - \overline{X}_2)$$

4.2.2 Métodos de los determinantes con las ecuaciones normales

4.2.2.a Ecuaciones normales

$$SP_{YX_1} = SC_{X_1}\ \beta_1 + SP_{X_1X_2}\ \beta_2$$
$$SP_{YX_2} = SP_{X_1X_2}\ \beta_1 + SC_{X_2}\ \beta_2$$

4.2.2.b Determinantes

$$A' = \begin{vmatrix} SC_{X_1} & SP_{X_1X_2} \\ SP_{X_1X_2} & SC_{X_2} \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} SP_{YX_1} & SP_{X_1X_2} \\ SP_{YX_2} & SC_{X_2} \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} SC_{X_1} & SP_{YX_2} \\ SP_{X_1X_2} & SP_{YX_2} \end{vmatrix}$$

$$b_1' = \frac{B'}{A'} \qquad b_2' = \frac{C'}{A'}$$

4.2.2.c Establecimiento del modelo de estimación

$$Y = \overline{Y} + b_1(X_1 - \overline{X}_1) + b_2(X_2 - \overline{X}_2)$$

5.- Desarrollo del ejemplo

5.1 Cálculo de los coeficientes de regresión

5.1.1 Método aritmético simple

5.1.1.a Cálculo de los coeficientes de correlación simple

$$r_{Y.1} = \frac{48,7158}{1329,709 \text{ x } 14,1063} = 0,3557$$

$$r_{Y.2} = \frac{924,262}{1329,709 \text{ x } 2957,058} = 0,4661$$

$$r_{1.2} = \frac{109,5244}{14,1063 \text{ x } 2957,058} = 0,5363$$

5.5.1.b Cálculo de los coeficientes de regresión parcial

$$b_{Y_{1.2}} = \frac{0,3557 - 0,4661 \text{ x } 0,5363}{1 - 0,5363^2} = 0,1489$$

$$b_{Y_{2.1}} = \frac{0,4661 - 0,3557 \text{ x } 0,5363}{1 - 0,5363^2} = 0,3885$$

5.5.1.cEstablecimiento del modelo

$$\hat{Y} = 24,2705 + 0,15\frac{\sqrt{1329,7095}}{14,1063}(X_1 - 2,21) + 0,39\frac{\sqrt{1329,7095}}{\sqrt{2957,058}}(X_2 - 28,31)$$

$$\hat{Y} = 13,6535 + 1,4545X_1 + 0,2615X_2$$

5.1.2 Método de los mínimos cuadrados

$$b_1 = \frac{B'}{A'} = \frac{(48{,}7158 \text{ x } 2957{,}058) - (924{,}262 \text{ x } 109{,}5244)}{(14{,}1063 \text{ x } 2957{,}058) - (109{,}5244)^2} = 1{,}4545$$

$$b_2 = \frac{C'}{A'} = \frac{(14{,}1063 \text{ x } 924{,}262) - (109{,}5244 \text{ x } 48{,}7158)}{(14{,}1063 \text{ x } 2957{,}058) - (109{,}5244)^2} = 0{,}2615$$

$$\hat{Y} = 24{,}2705 + 1{,}4545(X_1 - 2{,}2065) + 0{,}2615(X_2 - 28{,}31)$$

$$\hat{Y} = 13{,}6535 + 1{,}4545X_1 + 0{,}2615X_2$$

5.2 Pruebas de significación para el modelo

5.2.1 Suma de cuadrados total = SCT

$$SCT = \sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{n} = 1329{,}709$$

5.2.2 Suma de cuadrados de regresión = SCREG

SCREG = 1,4545 x 48,7158 + 0,2615 x 924,262 = 309,6892

5.2.3 Suma de cuadrados de residual = SCRES

SCRES = SCT - SCREG = 1329,709 - 309,689 = 1020,020

5.2.4 ANAVAR

F. de V.	G. de L.	S.C.	C.M.	F
Regresión	2	309,689	154,845	2,58 n.s.
Residual	17	1020,020	60,00	
Total	19	1329,709		

$$R^2 = \frac{309,689}{1329,709} = 0,2328$$

5.3 Prueba de significación para los coeficientes de regresión

5.3.1 Para b_1

$$t_1 = \frac{b_1}{sb_1}$$

$$sb_1 = \sqrt{CMRES \text{ x } C_{11}}$$

$$C_{11} = \frac{SC(X_2)}{D} = \frac{SC(X_2)}{SC(X_1).SC(X_2) - (SPX_1X_2)^2}$$

$$C_{11} = \frac{2957,058}{14,1063 \text{ x } 2957,058 - 109,5244^2} = 0,0995$$

$$sb_1 = \sqrt{60,00 \text{ x } 0,0995} = 2,4433$$

$$t_1 = \frac{1,4545}{2,4433} = 0,59 \text{ n.s.}$$

5.3.2 Para b_2

$$t_2 = \frac{b_2}{sb_2}$$

$$sb_2 = \sqrt{CMRES \times C_{22}}$$

$$C_{22} = \frac{SC(X_1)}{D} = \frac{14{,}1063}{29717{,}553} = 0{,}0005$$

$$sb_2 = \sqrt{60{,}00 \times 0{,}0005} = 0{,}1687$$

$$t_2 = \frac{0{,}2615}{0{,}1687} = 1{,}54 \text{ n.s.}$$

6. Interpretación

De acuerdo a los resultados del ejemplo, no existe una relación lineal múltiple entre la capacidad de intercambio catiónico y las variables independientes contenido de carbón y % de arcilla. Los especialistas en suelo indican que estas variables están asociadas, sin embargo, en este ejemplo, no se evidenció esa asociación debido quizás a los siguientes motivos: 1) el tamaño de la muestra es bajo n=20, 2) La relación funcional no es lineal sino de cualquier otro tipo, polinomial, cuadrático, exponencial, logarítmico, entre otros. 3) No se tomaron en cuenta otras variables independientes que pueden influir para aumentar la determinación del modelo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO DE REGRESION CON MATRICES

Los datos que se presentan a continuación son correspondientes a un experimento realizado con el cultivo de maíz donde X_1(Distancia entre hileras), X_2 (Número de mazorcas por m^2), X_3 (Número de granos por mazorca) y Y (Rendimiento granos en Ton/ha.).

X_1 Distanciamiento (cm)	Y Rendimiento Granos(Ton/ha)	X_2 Número de Mazorcas/m^2	X_3 Número Granos por mazorca
20	11,56	20,3	206
20	12,00	21,0	215
20	10,40	19,0	180
25	10,66	13,4	361
25	9,80	12,8	354
25	11,50	13,6	371
30	9,82	11,0	394
30	9,60	10,8	380
30	9,50	10,0	350
40	9,28	6,3	605
40	9,00	6,0	600
40	6,30	5,9	580
50	7,55	4,0	671
50	7,00	3,5	642
60	6,00	3,0	670
60	6,20	3,2	680
60	5,80	2,8	643
100	2,29	1,2	621
100	2,50	1,3	650
100	3,00	1,8	670

1.- Modelo poblacional planteado

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$$

$Y_i =$ variable dependiente

$X_{1i}, X_{2i}, X_{3i} =$ variables independientes

$\beta_0 =$ int ercepto

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 =$ coeficientes de regresion de las respectivas variables independientes

$\varepsilon_i =$ efecto aleatorio.

2.- Supuestos del modelo

X_{ji} son fijos

$E(\varepsilon_i) = 0$

$V(\varepsilon_i) = \sigma^2$

Y_i esta distribuido $(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}, \sigma^2)$

ε_i esta distribuido $(0 , \sigma^2)$

3.- Hipótesis a probar

3.1 ANAVAR

Ho: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

Ha: $\beta_i \neq 0$

3.2 Pruebas de t

$$Ho{:}\beta_0 = 0 \qquad t_0 = \frac{b_0}{s_{b_0}}$$

$$Ha{:}\beta_0 \neq 0$$

$$Ho{:}\beta_1 = 0 \qquad t_1 = \frac{b_1}{s_{b_1}}$$

$$Ha{:}\beta_1 \neq 0$$

$$Ho{:}\beta_2 = 0 \qquad t_2 = \frac{b_2}{s_{b_2}}$$

$$Ha{:}\beta_2 \neq 0$$

$$Ho{:}\beta_3 = 0 \qquad t_3 = \frac{b_3}{s_{b_3}}$$

$$Ha{:}\beta_3 \neq 0$$

3.3 Matriz Varianza-Covarianza

$$S = (X'X)^{-1}\hat{\sigma}^2 = \begin{bmatrix} s^2_{b_o} & s_{b_0b_1} & s_{b_0b_2} & s_{b_0b_3} \\ & s^2_{b_1} & s_{b_1b_2} & s_{b_1b_3} \\ & & s^2_{b_2} & s_{b_2b_3} \\ & & & s^2_{b_3} \end{bmatrix}$$

4.- Modelo de estimación

4.1.- La estimación de los coeficientes de regresión del modelo se hace a través del método de los mínimos cuadrados utilizando el enfoque matricial. Se parte del modelo (simplificado matricialmente)

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & X_{31} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & X_{32} \\ 1 & X_{13} & X_{23} & X_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & X_{3n} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

4.2 Determinación de las ecuaciones normales

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$\varepsilon = Y - X\beta$$

$$\varepsilon'\varepsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

$$\varepsilon'\varepsilon = Y'Y - Y'X\beta - (X\beta)'Y - (X\beta)'(X\beta)$$

$$\varepsilon'\varepsilon = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'\beta$$

$$\frac{\partial\varepsilon'\varepsilon}{\partial\beta} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$X'X\beta = X'Y$ Ecuaciones Normales

4.3 Si se cumple que la matriz $X'X$ es no singular se realiza la premultiplicación de ambos términos de la ecuación por $(X'X)^{-1}$ obteniéndose;

$$(X'X)^{-1}X'X\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$
$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

(12.25)

siendo la ecuación (12.25) la que permitirá estimar los coeficientes del modelo.

5.- Pruebas de significación

5.1 Análisis de Varianza (ANAVAR)

F. de V.	G. de L.	S.C.	C.M.	F
Regresión	k	$B'X'Y - n\,Y^2$	SCRegresión/k	CMRegresión/ CMResidual
Residual	n - k - 1	$Y'Y - B'X'Y$	SCResidual/n-k-1	
Total	n - 1	$Y'Y - n\,Y^2$		

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

5.2.- Pruebas de t.

$$t_0 = \frac{b_0}{sb_0} \qquad t_1 = \frac{b_1}{sb_1} \qquad t_2 = \frac{b_2}{sb_2} \qquad t_3 = \frac{b_3}{sb_3}$$

$$S^2 = (X'X)^{-1}\hat{\sigma}^2 = (X'X)^{-1}\text{CM Residual}$$

$$\text{Si} \quad t_i \geq t_{t-1,n-k-1} \qquad \text{Se rechaza Ho}$$

$$\text{Si} \quad t_i < t_{t-1,n-k-1} \qquad \text{No se rechaza Ho}$$

6.- Prueba de Bondad de Ajuste del Modelo

6.1.- Coeficiente de Correlación Múltiple

$$R = \frac{\text{SC Regresion}}{\text{SCTotal}}$$

Este coeficiente indicaría el grado de asociación que existe entre la variable dependiente (Y) y la función de regresión de las variables independientes (X_1, X_2, X_3).

6.2.- Coeficiente de determinación

$$R^2 = \frac{\text{SC Regresion}}{\text{SCTotal}} x100$$

Este coeficiente permite conocer cuanto de la variabilidad total es posible explicar con el modelo de regresión obtenido.

7.-Desarrollo del ejemplo:

7.1.-Estimación de los coeficientes de regresión

$$\beta = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$Y = \begin{bmatrix} 11,56 \\ 12,00 \\ 10,40 \\ \vdots \\ 2,50 \\ 3,00 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 20,3 & 206 \\ 1 & 20 & 21,0 & 215 \\ 1 & 20 & 19,0 & 180 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 100 & 1,3 & 650 \\ 1 & 100 & 1,8 & 670 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 7,173 \\ -0,088 \\ 0,253 \\ 0,006 \end{bmatrix}$$

7.2.- Pruebas de significación.

7.2.a.- Análisis de varianza

F. de V.	G. de L.	SC	CM	F
Regresión	3	165,2875	55,095	277,81
Residual	17	3,371474	0,198322	
Total	20			

7.2.b.- Pruebas de t.

$$t_o = \frac{7,173}{1,9497} = 3,68\,*$$

$$t_1 = \frac{-0,08774}{0,00673} = -13,04\,**$$

$$t_2 = \frac{0,2526}{0,07546} = 3,35\,*$$

$$t_3 = \frac{0,00568}{0,00242} = 2,34\,*$$

7.3.- Bondad de ajuste del modelo.

$$R^2 = \frac{SC\,Re\,gresion}{SCTotal} x100 = 98\%$$

8.- Matriz de Correlación.

	Dist (X_1)	Rend. (Y)	Mazorcas (X_2)	Granos (X_3)
Dist (X_1)	1,0000			
Rend. (Y)	-0,9802	1,0000		
Mazorcas (X_2)	-0,8094	0,8597	1,0000	
Granos (X_3)	0,7490	-0,7856	-0,9705	1,0000

Según los datos anteriores la variable independiente que está mayormente correlacionada con Y es el distanciamiento (X_1), con un coeficiente de correlación muy alto -0,9802. El signo negativo señala que las tendencias entre las variables son opuestas; es decir, al aumentar la separación o distancia entre las plantas disminuye el rendimiento. Lo mismo ocurre con la relación entre la Distancia (X_1) y el número de mazorcas por metro cuadrado (X_2); sin embargo el hecho de que la correlación entre Distancia (X_1) y el número de granos por mazorca (X_3) sea de signo positivo sugiere que si bien cuando se aumenta la distancia entre las

plantas disminuye el número de mazorca por metro cuadrado (X_2), el tamaño o peso de mazorcas obtenidas a baja densidad de siembra (distancia de separación grande) debe ser mayor, ya que el número de granos por mazorca aumenta cuando la separación entre las plantas es mayor.

9.- Con un ejercicio asignado por su profesor realice las siguientes actividades.

.- Hacer un diagrama de esparcimiento sobre una gráfica

.- Calcular la ecuación de regresión por el método de los mínimos cuadrados utilizado de matrices y vectores.

.- Establecer hipótesis y supuestos respectivos

.- Esquema de Anavar.

.- Prueba de hipótesis.

.- Bondad de Ajuste del modelo.

.- Interpretación.

Capítulo 13

ANÁLISIS DE COVARIANZA

Introducción

Así como el análisis de la varianza se presentó como una metodología o técnica sencilla que se utiliza para obtener información, en este tema se tratará de describir de manera sencilla otro tipo de análisis que es de gran utilidad en la investigación agrícola, el cual se refiere como Análisis de Covarianza y representa otra de las técnicas que puede ser utilizada con el objeto de reducir la varianza experimental.

En la respuesta de un ser vivo (planta o animal) sometido en un ensayo a la aplicación de unos tratamientos, influyen una serie de factores que pueden ser medidos o cuantificados por el investigador; muchos de estos factores pueden a su vez ser controlados por el Diseño Experimental que se esté usando, otras en cambio a pesar de que pueden ser observadas y medidas no son, sin embargo, controlables como fuentes de variación del diseño, a este tipo de factores se les denomina covariables o variables concomitantes.

Si se denomina Y a la respuesta que el sujeto de investigación (animal o planta) da a la aplicación de un tratamiento cualquiera, se puede denominar como X el efecto de otro factor que pueda estar actuando. Véase el siguiente par de ejemplos:

* Si se aplican dosis diferenciales de fertilizantes a un cultivo; el rendimiento (Y) que produzca el cultivo como respuesta, pudiese estar influenciado por la acción real del fertilizante en sí como también por el número de plantas presentes en la unidad experimental o parcela.

* Si se desea medir el efecto de varias raciones alimenticias (con distintos valores de proteína por ejemplo), se escogen un grupo de animales, se pesan al inicio del ensayo y posteriormente al concluir el período experimental, la diferencia

entre estas dos pesadas sería la respuesta de los animales a la aplicación de las distintas raciones puede deberse a un efecto real de los tratamientos (Y) o sencillamente el peso final podía estar afectado por el peso inicial (X).

En ambas situaciones al investigador lo que le interesa es comparar la bondad de los tratamientos, respuesta de plantas o animales a la aplicación de los tratamientos (variable Y) libre del efecto de la covariable X (número de plantas y peso inicial, en los ejemplos). Para ello tiene que recurrir al Análisis de Covarianza, la cual es una metodología sencilla que hace uso de conceptos conocidos tales como Análisis de Varianza y Análisis de Regresión, permitiendo comparaciones de los tratamientos libres del efecto de la covariable.

La covarianza tiene otra aplicación importante en Investigación Agrícola cuando se usa como método para la obtención (estimación) de datos faltantes en un experimento.

Modelo y Supuestos básicos del Análisis de Covarianza

El modelo lineal aditivo para cualquier diseño es el mismo que corresponde al análisis de Varianza, pero lleva un término adicional correspondiente a la variable concomitante. A continuación se presentan los modelos correspondientes a los tres diseños clásicos:

* Completamente aleatorizado.

* Bloques al azar

* Cuadrado latino

Desarrollo del Análisis de Covarianza

La metodología en términos generales consiste en los siguientes pasos:

* Hacer análisis conjunto de Varianza y Covarianza.
* Con los datos correspondientes al error experimental (EE), realizar una prueba de significación para la regresión que indique si hay o no efecto de la covariable.
* Realizar una prueba de significación de tratamientos corregidos.
* Ajustar los rendimientos, usando la ecuación de regresión transformada.
* Hacer comparaciones de medias ajustadas.

Con el uso de algunos ejemplos numéricos se demostrará el uso de esta metodología.

Ejemplo de Análisis de Covarianza en Diseños Completamente Aleatorizados.

Suponga que se realiza un ensayo comparativo de selecciones de algodón y se obtiene información sobre rendimiento (Y) y porcentaje de infestación (X) de una enfermedad causada por un hongo. (Tabla 13.1). Las diferencias entre los tratamientos pudieran deberse a efectos genéticos reales de producción entre las selecciones o sencillamente a que algunas son más atacadas que otras en el hongo. Para establecer si este último ocurre, se procede de la siguiente manera:

Tabla 13.1 Datos de un diseño completamente aleatorizado en presencia de una covariable.

Parcelas	SELECCIONES DE ALGODÓN A X	A Y	B X	B Y	C X	C Y	D X	D Y	E X	E Y
1	30	80	42	77	30	80	38	90	38	87
2	64	73	56	74	32	66	26	76	16	75
3	54	70	60	75	28	79	34	87	36	72
4	48	79	46	86	32	90	12	96	16	91
5	88	71	64	77	56	72	32	89	28	90
6	40	74	32	73	28	76	42	80	32	73
Totales	324	447	300	462	206	463	184	618	166	488

$\sum X = 1100$ $\overline{X} = 39{,}30$ $\sum Y = 2378$ $\overline{Y} = 79{,}27$

Aplicación del Procedimiento:

Primer Paso:

Se determinan las sumas de cuadrados para ambas variables X e Y por la vía usual y las sumas de productos de la siguiente manera:

* Suma de Productos para el total:

$$SPTotal = [(30 \times 80) + (64 \times 73) + ... + (32 \times 73)] - \frac{(1180 \times 2378)}{30} = -1679$$

* Suma de Productos para selecciones de algodón (tratamientos)

$$SPTrat = \tfrac{1}{6}[(324 \times 447) + ... + (166 \times 488)] - F.C. = -1014$$

* Suma de productos para el error

$$SPEE = SPTotal - SPTrat = -1679 - (-1014) = -683$$

Con estos datos se construye la tabla siguiente:

F. de V.	G. de L.	SCX	SPXY	SCY
Selecciones (T)	4	3391	-1014	519
Error (E)	25	4412	-683	1183
Total	29	7803	-1697	1702

Ahora se puede probar la hipótesis (Ho) para las medias de rendimiento (Y) y porcentaje de infestación (X).

$$F_y = \frac{519/4}{1183/25} = \frac{129{,}75}{47{,}32} = 2{,}74(n.s.)$$

$$F_x = \frac{3391/4}{4412/25} = \frac{847{,}75}{176{,}49} = 4{,}80\,*$$

El análisis sin ajuste por covariable indica que no hay diferencias entre las medias de rendimientos de las selecciones (no se rechaza Ho), pero si hay diferencias entre las medias correspondientes a los porcentajes de infestación; es decir, el comportamiento de las selecciones con relación al ataque del hongo es diferente (se rechaza Ho).

Segundo paso:

Para poder establecer si el efecto del porcentaje diferencial de ataque de hongos afecta la producción se debe hacer una prueba de significación para regresión:

F.de V.	G. de L.	S. de C.	C.M.	F	Fe
Regresión	1	105,73	105,73	2,36	2,49
Desv. de Reg.	24	1077,27	44,83		
Residual	25	1183			

Se utilizan los datos del Error Experimental del cuadro anterior.

-. Suma de Cuadrados para efecto de regresión

$$\text{SCReg} = \frac{\left(\text{SPXY}_E\right)^2}{\text{SCX}_E} = \frac{(-683)^2}{4412} = 105{,}73$$

-. Suma de cuadrados para desviaciones desde la regresión

$$SC_D = SCY_E - SCR = 1183 - 105{,}73 = 1077{,}27$$

Este análisis revela que a pesar de que el comportamiento de las selecciones frente al ataque del hongo es diferente, este hecho no afecta mayormente la producción (2,36 < 2,49); es decir, se puede hacer las comparaciones de medias con los datos originales sin ajustes por covarianza. No obstante para seguir demostrando el método se supone que si hubo significación para la regresión de Y sobre X; es decir efecto del porcentaje de infestación sobre el rendimiento.

Tercer Paso:

El siguiente paso consiste en hacer una prueba de significación para tratamientos ajustados.

F. de V.	G. de L.	S. de C.	C.M.	F
Tratamientos(T′)	4	255,73	64	1,43(n.s.)
Error(E′)	24	1077,27	44,9	
(T + E)′	28	1333,00		

En este análisis se pierde un grado de libertad, el que se usó para la regresión.

-. Suma de Cuadrados de (T + E) corregido.

$$SC(T+E)' = SCYtotal - \frac{(SPXYtotal)^2}{SCXtotal} = 1702 - \frac{(-1697)^2}{7803} = 1333$$

-. Suma de Cuadrados del Error Corregido

$$SCE' = SCYres - \frac{(SPXYres)}{SCXres} = 1183 - \frac{(-683)^2}{4412} = 1077{,}27$$

-. Suma de Cuadrados de tratamiento Corregido

$$SCT' = SC(T+E)' - SCE' = 1033,00 - 1077,27 = 255,73$$

En este caso no hay diferencias válidas entre tratamientos, igual que cuando se hizo el análisis sin ajuste por covarianza; suponiendo que si hubo diferencias; se necesita hacer los correspondientes ajustes de medias de tratamientos.

Cuarto paso. Ajuste de medias:

Partiendo del modelo:

$$Y_i - \beta \ (\overline{X}_i - \overline{X}..) = \mu + \tau_i + \varepsilon_i$$

tomando el lado izquierdo de la igualdad como rendimiento libre del efecto de X y generalizando, entonces,

$$\hat{Y}_i = \overline{Y}_i - b(\overline{X}_i - \overline{X}..)$$

que dará el rendimiento ajustado $\hat{Y}_i$ de un tratamiento cualquiera, en función de su promedio original $\overline{Y}_i$; b es el coeficiente de regresión y $\overline{X}$ es el promedio de porcentaje de infestación de dicho tratamiento y $\overline{X}..$ es la media general de los porcentajes de infestación.

Ajustes de medias

Selecciones	Yi	b(Xi - X..)	Yi - b(Xi - X..)
A	74,5	-0,1548(54,0 -39,3)	76,0
B	77,0	-0,1548(50.0 -39,3)	78,7
C	77,2	-0,1548(34,3 -39,3)	76,4
D	86,3	-0,1548(30,7 - 39,3)	85,0
E	81,3	-0,1548(27,7 - 39,3)	79,5

$$b = \frac{SPXY_E}{SCX_E} = \frac{-683}{4412} = -0,1548$$

Quinto paso:

Comparación de medias para la aplicación de la prueba de medias mds, en este caso se usa como una expresión del error típico de la diferencia de dos medias la siguiente expresión:

$$Sd = \sqrt{CME'\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2}{SCX_E}\right]}$$

Donde CME′ = varianza del Error Experimental en la prueba de significación para tratamientos corregidos.
X_1 = promedio de % de infestación de una selección (tratamiento)
X_2 = promedio de % de infestación de la otra selección (tratamiento)
n_1 y n_2 = número de observaciones para los tratamientos respectivos.
SCX_E = Suma de Cuadrados para X del primer análisis.

En el ejemplo, si se compara la media de E con la de A:

$$Sd = \sqrt{44{,}9\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{(54{,}0-27{,}7)^2}{4412}\right]} = 4{,}69$$

En este caso como no hay diferencias significativas entre tratamientos (selecciones) no es necesario hacer comparaciones de medias.

Ejemplo de Análisis de Covarianza en Diseños en Bloques Aleatorios

Sea un ensayo comparativo de seis variedades de papas del cual se obtiene rendimientos (Y) y número de plantas por parcela (X).

Tabla 13.2 Datos de un diseño en bloques aleatorizados en presencia de una covariable.

Variedades	I		II		III		IV		Totales	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
A	28	202	22	165	27	191	19	134	96	692
B	23	145	26	201	28	203	24	180	101	729
C	27	186	24	185	27	185	28	220	106	778
D	24	201	28	231	30	238	30	261	112	931
E	30	202	26	178	26	198	29	226	111	904
F	30	228	25	221	27	207	24	204	106	860
Totales	162	1166	151	1181	165	1222	154	1225	632	4794

$$\bar{X}_{...} = 632 / 24 = 26,33$$

Primer Paso:

Se obtienen las sumas de productos y Sumas de Cuadrados de rutina.

* Suma de Productos para el total:

$$SPTotal = [(28 \times 202) + ... + (24 \times 204)] - \frac{(632 \times 4794)}{24} = 1405$$

* Suma de Productos para repeticiones

$$SPRep = \frac{1}{6}[(162 \times 1166) + ... + (154 \times 1225)] - F.C. = 8,50$$

* Suma de Productos para tratamientos

$$SPTrat = \frac{1}{4}\left[(96x692)+...+(106\,x\,860)\right] - F.C. = 559{,}25$$

* Suma de productos para el error

$$SPEE = SPTotal - SPRep - SPTrat = 1485 - 8{,}50 - 559{,}25 = 917{,}25$$

Con estos datos se construye la tabla siguiente:

F. de V.	G. de L.	SCX	SPXY	SCY
Total	23	181,33	1485	18678,50
Repeticiones	3	21,67	8,50	436,17
Selecciones (T)	5	45,83	559,25	9440,00
Error (E)	15	113,83	917,25	8752,33
T + E	20	159,66	1476,50	18242,33

Ahora se puede probar la hipótesis (Ho) para rendimiento (Y) y número de plantas (X).

$$F_y = \frac{9440/5}{8752{,}33/15} = \frac{1888}{583{,}49} = 3{,}24\,*$$

$$F_x = \frac{45{,}83/5}{113{,}83/15} = \frac{9{,}17}{7{,}59} = 1.20 n.s.$$

El análisis sin ajuste por covariable indica que hay diferencias entre las medias de rendimientos de las selecciones (se rechaza Ho), pero no hay diferencias entre las medias correspondientes a número de plantas (no se rechaza Ho).

Segundo paso:

Prueba de significación para regresión:

F.de V.	G. de L.	S. de C.	C.M.	F
Regresión	1	7391,26	7391,26	77,57
Desv. de Reg.	14	1334,07	95,29	
Residual	15	8725,33		

Se utilizan los datos del Error Experimental del cuadro anterior.

-. Suma de Cuadrados para efecto de regresión

$$SCReg = \frac{\left(SPXY_E\right)^2}{SCX_E} = \frac{\left(917{,}25^2\right)}{113{,}83} = 7391{,}25$$

-. Suma de cuadrados para desviaciones desde la regresión

$$SC_D = SCY_E - SCR = 1334{,}07$$

En este caso si hay influencia notable del número de plantas (X) sobre el rendimiento (Y), es decir hay regresión de Y sobre X, por lo tanto se requiere ajustar tratamientos.

Tercer Paso:

Prueba de significación para tratamientos ajustados.

F. de V.	G. de L.	S. de C.	C.M.	F
Tratamientos′	5	3253,92	650,70	5,83**
Error′	14	1334,07	95,29	
(T + E)′	19	4587,99		

-. Suma de Cuadrados de (T + E) corregido.

$$SC(T+E)' = SCY_{T+E} - \frac{(SPXY_{T+E})^2}{SCX_{T+E}} = 18242{,}33 - \frac{(1476{,}50)^2}{159{,}66} = 4587{,}99$$

-. Suma de Cuadrados del Error Corregido

$$SCE' = SCYres - \frac{(SPXY\ E\ )}{SCX\ E} = 8752{,}33 - \frac{(917{,}25)^2}{113{,}83} = 1334{,}07$$

-. Suma de Cuadrados de tratamiento Corregido

$$SCT' = SC(T+E)' - SCE' = 4587{,}99 - 1334{,}07 = 3253{,}92$$

El ajuste hecho a los tratamientos aumenta la significación entre los mismos.

Cuarto paso. Ajuste de medias:

Partiendo del modelo:

$$Y_i - \beta\ (\overline{X}_i - \overline{X}..) = \mu + \tau_i + \varepsilon_i$$

tomando el lado izquierdo de la igualdad como rendimiento libre del efecto de X y generalizando, entonces,

$$\hat{Y}_i = \overline{Y}_i - b(\overline{X}_i - \overline{X}..)$$

Ajustes de medias

Variedades	Yi	b(Xi - X..)	Yi - b(Xi - X..)
A	173,00	8,05 (24,00 - 26,33)	191,80
B	182,25	8,05 (25,25 - 26,33)	191,00
C	194,50	8,05 (26,50 -26,33)	193,10
D	232,75	8,05 (28,00 - 26,33)	219,30
E	201,10	8,05 (27,75 -26,33)	189,60
F	215,00	8,05 (26,50 - 26,33)	213,60

$\overline{X} = 26{,}33$

$$b = \frac{SPXY_E}{SCX_E} = \frac{917{,}25}{113{,}83} = 8{,}05$$

Quinto paso:

Comparación de medias para la aplicación de la prueba de medias mds, en este caso se usa como una expresión del error típico de la diferencia de dos medias la siguiente expresión:

$$Sd = \sqrt{CME'\left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2}{SCX_E}\right]}$$

Donde CME' = varianza del error experimental en la prueba de significación para tratamientos corregidos.
$\overline{X}_1$ = promedio de plantas de una variedad (tratamiento)
$\overline{X}_2$ = promedio de plantas de la otra variedad (tratamiento)
n_1 y n_2 = número de observaciones para los tratamientos respectivos.
SCX_E = Suma de Cuadrados para la covariable.

En el ejemplo, si se compara la media de D con la de E:

$$Sd = \sqrt{95{,}29\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{(28{,}00 - 27{,}75)^2}{113{,}83}\right]} = 5{,}64$$

$$t_C = \frac{219{,}30 - 189{,}60}{5{,}64} = 5{,}27^{**}$$

$$t_{tab} = 2{,}62 \quad y \quad 2{,}98$$

Para niveles de significación de 0,05 y 0,01 respectivamente.

Existen diferencias altamente significativas entre D y E los cuales son los rendimientos extremos. Se procede de igual forma para las otras comparaciones posibles.

Ejemplo de Análisis de Covarianza en Diseños Cuadrados Latinos

Resultados en lb-parcela (Y) y número de plantas en un ensayo de seis líneas de maíz (datos tomados de Federer).

Tabla 13.3. Datos de un diseño en cuadrados latinos en presencia de una covariable.

Linea	A	B	C	D	E	F	Total
X	15	16	18	14	15	17	96
Y	8,6	7,5	6,7	6,5	8,2	4,7	42,2
Linea	B	C	D	E	F	A	
X	16	15	16	19	21	14	101
Y	7,6	8,2	8,3	4,6	5,2	6,5	40,4
Linea	C	D	E	F	A	B	
X	15	16	16	19	15	17	98
Y	5,7	9,6	7,1	4,8	7,5	7,5	42,2
Linea	D	E	F	A	B	C	
X	18	18	20	18	22	17	113
Y	8,3	5,3	10,0	6,8	7,8	6,6	44,8
Linea	E	F	A	B	C	D	
X	15	18	19	16	16	15	99
Y	8,3	7,9	5,4	9,3	4,8	8,0	43,7
Linea	F	A	B	C	D	E	
X	18	20	19	17	17	15	106
Y	5,7	8,7	8,1	6,1	7,2	7,4	43,2
X	100	103	108	103	106	95	615
Y	44,2	47,2	45,6	38,1	40,7	40,7	**256,5**

TOTALES DE TRATAMIENTOS

Linea	A	B	C	D	E	F
X	102	98	102	100	101	112
Y	42,5	49,3	42,5	45,7	45,4	31,1

Primer Paso:

Sumas de productos y Sumas de Cuadrados

-. Suma de Productos para el total:

$$SPTotal = [(18 \times 8{,}6) + \ldots + (15 \times 7{,}4)] - \frac{(615 \times 256{,}5)}{36} = -10175$$

-. Suma de Productos para Filas:

$$SPFilas = \frac{1}{6}[(98 \times 42{,}2) + \ldots + (106 \times 43{,}2)] - F.C. = 4708$$

-. Suma de Productos de Columnas:

$$SPCol = \frac{1}{6}[(100 \times 44{,}2) + \ldots + (95 \times 40{,}7)] - F.C = 3358$$

-. Suma de Productos para tratamientos

$$SPTrat = \frac{1}{6}[(102x42{,}5) + \ldots + (112 \times 31{,}1)] - F.C. = -25208$$

-. Suma de productos para el error

$$SPEE = SPTotal - SPRep - SPTrat = -10175 - 4708 - 3358 - (-25208) = 6967$$

Con estos datos se construye la tabla siguiente:

F. de V.	G. de L.	SCX	SPXY	SCY
Total	35	134750	-10175	73260
Filas	5	29503	4708	1906
Columnas	5	17583	3358	10010
Tratamientos (T)	5	19917	-25208	32413
Error (E)	20	67677	6967	28939
T + E	25	87594	-18241	61352

$$F_y = \frac{32413/5}{28939/20} = \frac{6482,60}{1446,95} = 4,48**$$

$$F_x = \frac{19917/5}{67677/20} = \frac{3983,40}{3383,85} = 1,18(n.s.)$$

$$F_{tab} = 2,71 \text{ y } 4,10.$$

El análisis sin ajuste por covariable indica que hay diferencias entre las medias de los tratamientos (se rechaza Ho), pero no hay diferencias entre las medias correspondientes a número de plantas (no se rechaza Ho).

Segundo paso:

Prueba de significación para regresión:

F.de V.	G. de L.	S. de C.	C.M.	F
Regresión	1	717,22	717,22	<1
Desv. de Reg.	19	28221,78	1185,36	
Residual	20			

-. Suma de Cuadrados para efecto de regresión

$$\text{SCReg} = \frac{(\text{SPXY}_E)^2}{\text{SCX}_E} = \frac{(6967^2)}{67677} = 717,22$$

-. Suma de cuadrados para desviaciones desde la regresión

$$\text{SC}_D = \text{SCY}_E - \text{SCR} = 28939,00 - 717,22 = 28221,78$$

En este caso no hay influencia notable del número de plantas (X) sobre el rendimiento (Y); es decir, no hay regresión de Y sobre X, por lo tanto no se requiere ajustar tratamientos. En consecuencia el resto del análisis se hace con los rendimientos iniciales (sin ajustar).

Tercer Paso:

Prueba de significación para tratamientos ajustados.

Se procede de la misma manera que en los casos anteriores, esto se haría si el análisis anterior lo hubiese indicado necesario.

Cuarto paso. Ajuste de medias:

Se procede igual que en los casos anteriores usando el modelo:

$$Y_i - \beta \ (\overline{X}_i - \overline{X}..) = \mu + \tau_i + \varepsilon_i$$

tomando el lado izquierdo de la igualdad como rendimiento libre del efecto de X y generalizando, entonces,

$$\hat{Y}_i = \overline{Y}_i - b(\overline{X}_i - \overline{X}..)$$

Quinto paso:

Comparación de medias ajustadas.

Se procede igual que en los casos anteriores, usando la expresión:

$$Sd = \sqrt{CME' \left[\frac{2}{r} + \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2}{SCX_E} \right]}$$

TÉCNICA PARA LA PARCELA FALTANTE

En muchos experimentos debido a situaciones inesperadas pueden perderse una o varias unidades experimentales. Tales perturbaciones pueden ocurrir debido a muchas razones tales como, aguachinamiento de la parcela, enfermedades, plagas, muerte de los animales que constituyen la unidad experimental, etc.

Existen métodos desarrollados para analizar datos bajo estas situaciones pero generalmente estos métodos son complicados. Existe otra serie de métodos más sencillos que permiten estimar el valor de la parcela perdida y realizar los analisis sin que se pierda el grado de balanceo o simetría de los procedimientos analíticos.

La situación que ocurre más frecuentemente es aquella en la que falta una observación.

En este caso se debe emplear un método que permita estimar un valor que reemplace a la observación faltante y después proceder con el análisis usual. El procedimiento de estimación de la observación faltante, comúnmente usado por los estadísticos consiste en asignar aquel valor de la observación faltante que reduzca la suma de cuadrados del error experimental cuando se efectúa el análisis de varianza. Desde el punto de vista matemático este resulta ser un problema que se resuelve mediante el cálculo diferencial representando como OF a la observación faltante, calculando la expresión algebraica de la suma de cuadrados del error experimental, derivando esta ecuación con respecto a OF e igualando a cero para obtener una solución.

El procedimiento puede resumirse a la siguiente fórmula, la cual proporciona una estimación de la observación faltante de acuerdo con el principio anterior.

$$OF = \frac{tT + bB - S}{(t-1)(b-1)} \qquad (13.1)$$

t = número de tratamientos.
b = número de bloques.
T = suma de observaciones con el mismo tratamiento como la observación faltante.
B = suma de observaciones con el mismo bloque como la observación faltante.
S = suma de todas las observaciones reales.

Este valor de OF se anota posteriormente en el sitio adecuado en la tabla de datos y los datos se analizan en la forma acostumbrada, tomando en cuenta que el error experimental pierde un grado de libertad debido a la estimación de la observación perdida, por consiguiente los grados de libertad para el error experimental en un diseño en bloques al azar serán (t - 1)(b - 1) - 1 y los grados de libertad para el total son (bt - 2).

El segundo cambio es un poco más complicado de aplicar. Antes de detallar este cambio es necesario que se discuta que es y porque es necesario. Puede demostrarse que bajo la hipótesis nula, el valor esperado de SCTrat/(t-1); es decir, el cuadrado medio de tratamiento, calculado a partir de los datos aumentados es mayor que s^2, el cuadrado medio del Error Experimental. Si esto es así , cualquier prueba de hipótesis que sea correcta pero que sea hecha de esta forma, será una prueba sesgada y a lo sumo puede ser considerada aproximada. La corrección de estos sesgos, el segundo cambio mencionado anteriormente, consiste en disminuir la suma de cuadrados de tratamiento en la cantidad:

$$\text{Correccion por sesgo} = S_e = \frac{\left[B - (t-1)OF\right]^2}{t(t-1)} \qquad (13.2)$$

Por lo tanto la nueva suma de cuadrados de tratamientos será

$$SCTrat' = SCTrat - S_e$$

y finalmente se obtiene el Análisis de Varianza siguiente:

ANAVAR

F. de V.	G. de L.	SC	CM	F
Trat	t - 1	SCTrat′	CMtrat′	CMTtrat′/CMEE
Bloque	b - 1	SCBloq	CMBloq	
EE	(t-1)(b-1)-1	SCEE	CMEE	
Total	bt - 2	SCTotal		

Ejemplo práctico sobre técnicas para parcelas faltantes

Tabla 13.4. Datos sobre un experimento realizado con seis variedades de Soya con cuatro repeticiones en un Diseño Experimental en Bloques. Los datos están dados en Kg-parcela.

	TRATAMIENTOS						
REP	1	2	3	4	5	6	Totales
I	24	23	28		30	41	146
II	18	17	17	19	19	18	108
II	41	41	49	39	19	18	207
IV	46	69	74	58	54	59	360
Totales	129	150	168	116	122	136	821

Estimación de la parcela faltante

$$OF = \frac{tT + bB - S}{(t-1)(b-1)} = \frac{6(116) + 4(146) - 821}{5x3} = 30,6$$

La corrección por sesgos en la suma de cuadrados de tratamiento sería entonces:

$$\text{Correccion por sesgo} = S_e = \frac{[B - (t-1)OF]^2}{t(t-1)} = \frac{[146 - 5x30{,}6]^2}{6x5} = 1{,}63$$

Cuando faltan dos o mas valores:

Puede seguirse el mismo procedimiento general, usando el cálculo para obtener estimaciones. Se pueden calcular también las estimaciones a través de métodos iterativos que proporcionen resultados equivalentes. Supongase que faltan dos valores; para uno de ellos se sustituye la media de todas las observaciones registradas y luego se estima el segundo valor faltante usando la ecuación (13.1). Coloque esa estimación en su lugar adecuado de la tabla, lleve la media general de su posición al lugar de la primera observación faltante y después estime un valor de la primera observación faltante usando de nuevo la ecuación (13.1). Aproximadamente después de dos ciclos se encontrará muy poco o ningún cambio entre dos estimaciones sucesivas del mismo valor faltante. Al llegar a este punto se tienen los valores estimados definitivos. Este procedimiento puede generalizarse fácilmente a casos en los que falten tres o más observaciones.

Sin embargo hay otros cambios que son necesarios, ante todo se deben reducir los grados de libertad asociados con el error experimental como con el total, en el número de observaciones estimadas. También debe reducirse la Suma de Cuadrados de Tratamiento en una cantidad especificada a fin de corregir por los sesgos incorporados por el procedimiento. Si se tienen dos observaciones faltantes (no en el mismo bloque) la corrección necesaria para los sesgos viene dada por:

$$\text{Correccion por sesgo} = S_e = \frac{[B' - (t-1)OF']^2 + [B'' - (t-1)OF'']^2}{t(t-1)}$$

donde

OF′ = Primera observación faltante.
OF′′ = Segunda observación faltante.
B′ = total de las observaciones en el mismo bloque en que se presenta la primera observación faltante.
B′′ = total de las observaciones en el mismo bloque en que se presenta la segunda observación faltante.

Aplicación de la Covarianza en la estimación de datos faltantes

Para usar el análisis de covarianza para estimar datos faltantes se supone una variable X relacionada con otra Y, los valores de X son ceros para todos los valores presentes y -1 para el faltante, para la variable Y se coloca 0 en el par de datos faltante y se colocan los valores reales en los demás casos. Las sumas de productos y las sumas de cuadrados se calculan de la forma convencional y finalmente trabajando con los datos del Error Experimental se calcula el coeficiente b, ignorando el signo de la suma de productos; este valor representa el valor estimado del dato faltante.

Suponga un diseño en bloques al azar con un valor perdido: parcela del tratamiento A en la repetición III. Tabla 13.5.

Tabla 13.5. Datos de ejercicio de aplicación de covarianza para la estimación de datos faltantes

	REPETICIONES									
Trata-	I		II		III		IV		V	
mientos	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	Totales	
A	0	6	0	7	-1	0	0	9	-1	22
B	0	2	0	5	0	4	0	5	0	12
C	0	8	0	7	0	9	0	6	0	30
D	0	3	0	7	0	5	0	5	0	20
	0	19	0	26	-1	18	0	25	-1	84

ANAVAR Y ANCOVA

F. de V.	G. de L.	SCX	SPXY	SCY
Total	15	1-(1/16)=15/16	5,37	27,75
Rep.	3	(1/4)-(1/16)=3/16	0,87	9,25
Trat.	3	(1/4)-(1/16)=3/16	-0,12	18,75
Error	9	9/16	4,51	59,75
T + E	12		4,39	79,50

El dato faltante es obtenido;

$$b = \frac{SPXY_E}{SCX_E} = \frac{4,51}{9/16} = 8,1$$

Este sería el valor estimado de Y correspondiente a la parcela del tratamiento A en la repetición III.

A continuación se mostrará otro ejemplo correspondiente a los datos de contenido de ácido ascórbico en miligramos por 100 grs. de peso seco en tres variedades de vainita.

-**Tabla 13.6.** Datos de otro ejercicio de aplicación de covarianza para la estimación de datos faltantes.

	REPETICIONES									
Trata-	I		II		III		IV		V	
mientos	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
A	-1	0	0	887	0	897	0	850	0	975
B	0	857	0	1189	0	918	0	968	0	909
C	0	917	0	1072	0	975	0	930	0	954
	-1	1774	0	3148	0	2790	0	2748	0	2838

ANAVAR Y ANCOVA

F. de V.	G. de L.	SCX	SPXY	SCY
Total	14	1-(1/15)=14/15	-886,53	945,296
Rep.	4	(1/3)-(1/15)=4/15	-295,20	359,823
Trat.	2	(1/5)-(1/15)=2/15	-164,73	206,533
Error	8	8/15	-426,60	381,940
T + E	10		-591,33	1893,592

La estimación del dato faltante es obtenido y su valor se calcula de la siguiente manera:

$$b = \frac{SPXY_E}{SCX_E} = \frac{426,60}{8/15} = 800$$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Atkinson, A. C.; W. G. Hunter, 1968. The Design of Experiments for Parameter Estimations. Technometrics 10: 271-289.

Barlett, M.S. 1974. "The Use of Transformations". Biometrics, Vol.3, pp 39-52.

Box G., E. P.; K. B. Wilson. 1951. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. J. R. Statis. Soc. Serie B 13 : 1-45

Canavos, G. 1988. Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos. México. Mc. Graw Hill. 651 p.

Chacín L., F. 1977. Importancia de los Estudios de Correlación y Regresión en el Campo Agrícola. Rev. Fac. Agron. (Maracay). 9(3): 75-96.

Chacín L., F. 1988. Una Contribución para el Análisis Estadístico de Cultivos Perennes y Semiperennes. Trabajo de Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Agrícolas. Facultad de Agronomía. Universidad Central de Venezuela. 160p.

Chacín L.; M. Cobo; O. Garrido; A. T. Leal; 1985. Diseño de Experimentos. Facultad de Agronomía. Universidad Central de Venezuela. (Mimeografiado)

Cochran, W.; G. Cox. 1980. Diseños Experimentales, México. Mc. Graw Hill, 650 p.

Cochran, W.; G. Cox. 1957. Experimental Design. 2ª ed. Wiley. Nueva York.

Davies, O. L. 1956. Design and Analysis of Industrial Experiments, 2ª Ed. New York. Hafner Publishing Company Inc.

Draper, N. R.; H. Smith. 1981. Applied Regression Analysis. 2a Ed. Nueva York. John Wiley and Sons. 709 p.

Draper, N. R.; H. Smith. 1966. Applied Regression Analysis. London Sidney. John Wiley and Sons. 80 p.

Duncan, D. B. 1951. A Significance Test for Differences between Ranked Treatments in an Analysis of Variance, Va. J. Sci. 2: 171-189.

Duncan, D.B. 1955. "Multiple Range and Multiple F test". Biometrics, Vol. 11, pp 1-42.

Dunnett, C. W. 1964. "New Tables for Multiple Comparisons with a Control". Biometrics, Vol. 20, p 482-491.

Federer, W. T. 1955. Experimental Design. Mc. Milan Co. New York.

Gabriel, K.R. 1964. "A Procedure for Testing the Homogeneity of all Sets of Means in Analysis of Variance". Biometrics, Vol. 3, pp 459.

Hernández, A.; Soto E. 1986. Una metodología para el análisis de mediciones repetidas en el tiempo sobre la misma unidad experimental. Tesis de Maestría, UCV. Maracay. Venezuela.

Martínez, D. A. 1988 Diseño de Experimentos. Métodos y Elementos de Teoría. México, Ed. Trillas. 300p.

Martínez, D. A. 1971. Aspectos Económicos del Diseño y Análisis de Experimentos. México. Colegio de Post-graduados Chapingo. 200 p.

Montgomery, D.C. 1976. Design and Analysis of Experiments. New York, John Wiley and Sons. 200p.

Pearson, E.S.; H. O. Hartley. 1966. "Biometrika Tables for Statisticians". Vol1. 3a Ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Pimentel, G. !978. Curso de Estadística Experimental. 8va. Ed. ESA "Luis de Quiroz", Picacicaba, SP.

Scheffe, H. 1959. The Analysis of Variance. Wiley, New York.

Steel and Torrie. 1990. Bioestadística, Principios y Procedimientos. 2ª. Ed., México. 622p.

Tukey, J. W. 1953. The Problem of Multiple Comparisons. Princeton University, Princeton, N.J. (Dtto)

Tukey, J. W. 1949. "Comparing Individual Means in the Analysis of Variance". Biometrics, Vol. 5 p 99-114.

Anexos

Tabla A: Valores del estadístico de Wilk y shapiro

n	0.01	0.02	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.98	0.99
3	0.753	0.756	0.767	0.789	0.959	0.998	0.999	1.000	1.000
4	.687	.707	.748	.792	.935	.987	.992	.996	.997
5	.686	.715	.762	.806	.927	.979	.986	.991	.993
6	.713	0.743	0.788	0.826	0.927	0.974	0.981	0.986	0.989
7	.730	.760	.803	.838	.928	.972	.979	.985	.988
8	.749	.778	.818	.851	.932	.972	.978	.984	.987
9	.764	.791	.829	.859	.935	.972	.978	.984	.986
10	.781	.806	.842	.869	.938	.972	.978	.983	.986
11	0.792	0.817	0.850	0.876	0.940	0.973	0.979	0.984	0.986
12	.805	.828	.859	.833	.943	.973	.979	.984	.986
13	.814	.937	.866	.889	.945	.974	.979	.984	.986
14	.825	.846	.874	.895	.947	.975	.980	.984	.986
15	.835	.855	.881	.901	.950	.975	.980	.984	.987
16	0.844	0.863	0.887	0.906	0.952	0.976	0.981	0.985	0.987
17	.851	.869	.892	.910	.954	.977	.981	.985	.987
18	.858	.874	.897	.914	.956	.978	.982	.986	.988
19	.863	.879	.901	.917	.957	.978	.982	.986	.988
20	.868	.884	.905	.920	.959	.979	.983	.986	.988
21	0.873	0.888	0.908	0.923	.960	0.980	0.983	0.987	0.989
22	.878	.892	.911	.926	.961	.980	.984	.987	.989
23	.881	.895	.914	.928	.962	.981	.984	.987	.989
24	.884	.898	.916	.930	.963	.981	.984	.987	.989
25	.888	901	.918	.931	.964	.981	.985	.988	.989
26	0.891	0.904	0.920	0.933	0.965	0.982	0.985	0.988	0.989
27	.894	.906	.923	.935	.965	.982	.985	.988	.990
28	.896	.908	.924	.936	.966	.982	.985	.988	.990
29	.898	.910	.926	.937	.966	.982	.985	.988	.990
30	.900	.912	.927	.939	.967	.983	.985	.988	.900
31	0.902	0.914	0.929	0.940	0.967	0.983	0.986	0.988	0.990
32	.904	.915	.930	.941	.968	.983	.986	.988	.990
33	.906	.917	.931	.942	.968	.983	.986	.989	.990
34	.908	.919	.933	.943	.969	.983	.986	.989	.990
35	.910	.920	.934	.944	.969	.984	.986	.989	.990
36	0.912	0.922	0.935	0.945	0.970	0.984	0.986	0.989	0.990
37	.914	.924	.936	.946	.970	.984	.987	.989	.990
38	.916	.925	.938	.947	.971	.984	.987	.989	.990
39	.917	.927	.939	.948	.971	.984	.987	.989	.991
40	.919	.928	.940	.949	.972	.985	.987	.989	.991
41	0.920	0.929	0941	0.950	9.972	0.985	0.987	0.989	0.991
42	.922	.930	.942	.951	.972	.985	.987	.989	.991
43	.923	.932	.943	.951	.973	.985	.987	.990	.991
44	.924	.933	.944	.952	.973	.985	.987	.990	.991
45	.926	.934	.945	.953	.973	.985	.988	.990	.991
46	0.927	0.935	0.945	0.953	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
47	.928	.936	.946	.954	.974	.985	.988	.990	.991
48	.929	.937	.947	.954	.974	.985	.988	.990	.991
49	.929	.937	.947	.955	.974	.985	.988	.990	.991
50	.930	.938	.947	.955	.974	.985	.988	.990	.991

Tabla **B**: Valores del estadístico para la Prueba de Cochran a un nivel de significación del 5%

k \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	17	37	145	×
2	0.9985	0.9750	0.9392	0.9057	0.8772	0.8534	0.8332	0.8159	0.8010	0.7880	0.7341	0.6602	0.5813	0.5000
3	0.9669	0.8709	0.7977	0.7457	0.7071	0.6771	0.6530	0.6333	0.6167	0.6025	0.5466	0.4748	0.4031	0.3333
4	0.9065	0.7679	0.6841	0.6287	0.5895	0.5598	0.5365	0.5175	0.5017	0.4884	0.4366	0.3720	0.3093	0.2500
5	0.8412	0.6838	0.5981	0.5441	0.5065	0.4783	0.4564	0.4387	0.4241	0.4118	0.3645	0.3066	0.2513	0.2000
6	0.7808	0.6161	0.5321	0.4803	0.4447	0.4184	0.3980	0.3817	0.3682	0.3568	0.3135	0.2612	0.2119	0.1667
7	0.7271	0.5612	0.4800	0.4307	0.3974	0..3726	0.3535	0.3384	0.3259	0.3154	0.2756	0.2278	0.1833	0.1429
8	0.6798	0.5157	0.4377	0.3910	0.3595	0..3362	0.3185	0.3043	0.2926	0.2829	0.2462	0.2022	0.1616	0.1250
9	0.6385	0.4775	0.4027	0.3584	0.3286	0.3067	0.2901	0.2768	0.2659	0.2568	0.2226	0.1820	0.0446	0.1111
10	0.6020	0.4450	0.3733	0.3311	0.3029	0.2823	0.2666	0.2541	0.2439	0.2353	0.2032	0.1655	0.1308	0.1000
12	0.5410	0.3924	0.3264	0.2880	0.2624	0.2439	0.2299	0.2187	0.2098	0.2020	0.1737	0.1403	0.1100	0.0833
15	0.4709	0.3346	0.2758	0.2419	0.2195	0.2034	0.1911	0.1815	0.1736	0.1671	0.1429	0.1144	0.0889	0.0667
20	0.3894	0.2705	0.2205	0.1921	0.1735	0.1602	0.1501	0.1422	0.1357	0.1303	0.1108	0.0879	0.0675	0.0500
24	0.3434	0.2354	0.1907	0.1656	0.1493	0.1374	0.1286	0.1216	0.1160	0.1113	0.0942	0.0743	0.0567	0.0417
30	0.2929	0.1980	0.1593	0.1377	0.1237	0.1137	0.1061	0.1002	0.0958	0.0921	0.0771	0.0604	0.0457	0.0333
40	0.2370	0.1576	0.1259	0.1082	0.0968	0.0887	0.0827	0.780	0.0745	0.0713	0.0595	0.0462	0.0347	0.0250
60	0.1737	0.1131	0.0895	0.0765	0.0682	0.0623	0.0583	0.0552	0.0520	0.0497	0.0411	0.0316	0.0234	0.0167
120	0.0998	0.0632	0.0495	0.0419	0.0371	0.0337	0.0312	0.0292	0.0279	0.0266	0.0218	0.0165	0.0120	0.0083
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

Tabla **C**: Valores del estadístico para la Prueba de Cochran a un nivel de significación del 1%

k \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	17	37	145	×
2	0.999	0.9950	0.9794	0.9586	0.9373	0.9172	0.8988	0.8823	0.8674	0.8539	0.7949	0.7067	0.6062	0.5000
3	0.9933	0.9423	0.8831	0.8335	0.7933	0.7606	0.7335	0.7117	0.6912	0.6743	0.6059	0.5153	0.4230	0.3333
4	0.9676	0.8643	0.7814	0.7212	0.6761	0.6410	0.6129	0.5897	0.5702	0.5536	0.4884	0.4057	0.3251	0.2500
5	0.9279	0.7885	0.6957	0.6329	0.5875	0.5531	0.5259	0.5037	0.4854	0.4697	0.4094	0.3351	0.2644	0.2000
6	0.8828	0.7218	0.6258	0.5635	0.5195	0.4866	0.4608	0.4401	0.4229	0.4084	0.3529	0.2858	0.2229	0.1667
7	0.8376	0.6644	0.5685	0.5080	0.4659	0.4347	0.4105	0.3911	0.3751	0.3616	0.3105	0.2494	0.1929	0.1429
8	0.7945	0.6142	0.5209	0.4627	0.4226	0..3932	0.3704	0.3522	0.3373	0.3248	0.2779	0.2214	0.1700	0.1250
9	0.7544	0.5727	0.4810	0.4251	0.3870	0.3592	0.3378	0.3207	0.3067	0.2950	0.2514	0.1992	0.1521	0.1111
10	0.7175	0.5358	0.4469	0.3934	0.3872	0.3308	0.3106	0.2945	0.2813	0.2704	0.2297	0.1811	0.1376	0.1000
12	0.6528	0.4751	0.3919	0.3428	0.3099	0.2861	0.2680	0.2525	0.2419	0.2320	0.1961	0.1535	0.1157	0.0833
15	0.5747	0.4069	0.3317	0.2882	0.2593	0.2386	0.2228	0.2104	0.2002	0.1918	0.1612	0.1251	0.0934	0.0667
20	0.4799	0.3297	0.2654	0.2288	0.2048	0.1877	0.1748	0.1646	0.1567	0.1501	0.1248	0.0960	0.0709	0.0500
24	0.4247	0.2871	0.2295	0.1970	0.1759	0.1608	0.1495	0.1406	0.1338	0.1283	0.1060	0.0810	0.0595	0.0417
30	0.3632	0.2412	0.1913	0.1635	0.1454	0.1327	0.1232	0.1157	0.1100	0.1054	0.0867	0.0658	0.0480	0.0333
40	0.2940	0.1915	0.1508	0.1281	0.1135	0.1033	0.0957	0.0898	0.0853	0.0816	0.0868	0.0503	0.0363	0.0250
60	0.2151	0.1371	0.1069	0.0902	0.0796	0.0722	0.0668	0.0625	0.0594	0.0567	0.0461	0.0344	0.0245	0.0167
120	0.1225	0.0759	0.0585	0.0489	0.0429	0.0387	0.0357	0.0334	0.0316	0.0302	0.0242	0.0178	0.0125	0.0083
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0

Tabla D: Valores del estadístico de Pearson y Hartley a un nivel de significación del 5%

ν \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	39.0	87.5	142	202	266	333	403	475	550	626	704
3	15.4	27.8	39.2	50.7	62.0	72.9	83.5	93.9	104	114	124
4	9.60	15.5	20.6	25.2	29.5	33.6	37.5	41.1	44.6	14.0	51.4
5	7.15	10.8	13.7	16.3	18.5	20.8	22.9	24.7	26.5	28.2	29.9
6	5.82	8.38	10.4	12.1	13.7	15.0	16.3	17.5	18.6	19.7	20.7
7	4.99	6.94	8.44	9.17	10.8	11.8	12.7	13.5	14.3	15.1	15.8
8	4.43	6.00	7.18	8.12	9.03	9.78	10.5	11.1	11.7	12.2	12.7
9	4.03	5.34	6.31	7.11	7.80	8.41	8.95	9.45	9.91	10.3	10.7
10	3.72	4.85	5.67	6.34	6.92	7.42	7.87	8.28	8.66	9.01	9.34
12	3.28	4.16	4.79	5.30	5.72	6.09	6.42	6.72	7.00	7.25	7.48
15	2.86	3.54	4.01	4.37	4.68	4.95	5.19	5.40	5.59	5.77	5.93
20	2.46	2.95	3.29	3.54	3.76	3.94	4.10	4.24	4.37	4.49	4.59
30	2.07	2.40	2.61	2.78	2.91	3.02	3.12	3.21	3.29	3.36	3.39
60	1.67	1.85	1.96	2.04	2.11	2.17	2.22	2.26	2.30	2.33	2.36
∞	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Tabla E: Valores del estadístico de Pearson y Hartley a un nivel de significación del 1%

ν \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	199	448	729	1036	1362	1705	2063	2432	2813	3204	3605
3	47.5	85	120	151	184	21(6)	24(9)	28(1)	31(0)	33(7)	36(1)
4	23.2	37	49	59	69	79	89	97	106	113	120
5	14.9	23	28	33	38	42	46	50	54	57	60
6	11.4	15.5	19.1	22	25	27	30	32	34	36	37
7	8.89	12.1	14.5	16.5	18.4	20	22	23	24	26	27
8	7.50	9.9	11.7	13.2	14.5	15.8	16.9	17.9	18.9	19.8	21
9	6.54	8.5	9.9	11.1	12.1	13.1	13.9	14.7	15.3	16.0	16.6
10	5.85	7.4	8.6	9.6	10.4	11.1	11.8	12.4	12.9	13.4	13.9
12	4.91	6.1	6.9	7.6	8.2	8.7	9.1	9.5	9.9	10.2	10.6
15	4.07	4.9	5.5	6.0	6.4	6.7	7.1	7.3	7.5	7.8	8.0
20	3.32	3.8	4.3	4.6	4.9	5.1	5.3	5.5	5.6	5.8	5.9
30	2.63	3.0	3.3	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2
60	1.96	2.2	2.3	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	2.6	2.7	2.7
∞	1.00	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Tabla F: Puntos porcentuales superiores de la amplitud studentizada $q_{\alpha} = (\bar{Y}_{max} - \bar{Y}_{min}) / S_{\bar{y}}$

p = número de medias de tratamiento

gl del error	α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17
	.01	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48
6	.05	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65
	.01	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30
7	.05	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30
	.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55
8	.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05
	.01	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03
9	.05	3.20	3.95	4.442	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74	8.87
	.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65
10	.05	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72
	.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36
11	.05	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61
	.01	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13
12	.05	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40	5.51
	.01	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94
13	.05	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43
	.01	4.26	4.96	5.40	7.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79
14	.05	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36
	.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66
15	.05	3.01	3.67	4.08	4.37	4.60	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31
	.01	4.17	4.83	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55
16	.05	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26
	.01	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46
17	.05	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.71	4.86	4.99	5.11	5.21
	.01	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38
18	.05	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17
	.01	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31
19	.05	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14
	.01	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25
20	.05	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11
	.01	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19
24	.05	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01
	.01	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02
30	.05	2.89	3.49	3.84	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.92
	.01	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85
40	.05	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.54	4.63	4.74	4.82
	.01	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.27	5.39	5.50	5.60	5.69
60	.05	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73
	.01	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53
120	.05	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.48	4.56	4.64
	.01	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.38
∞	.05	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55
	.01	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23

Tabla F: Puntos porcentuales superiores de la amplitud studentizada $q_\alpha = (\overline{Y}_{max} - \overline{Y}_{min}) / S_{\bar{y}}$ (continuación)

12	13	14	15	16	17	18	19	20	α	*gl* del error
7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21	.05	5
10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93	.01	
6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59	.05	6
9.49	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54	.01	
6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.09	7.17	.05	7
8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65	.01	
6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87	.05	8
8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03	.01	
5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64	.05	9
7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.32	8.41	8.49	8.57	.01	
5.83	5.93	6.03	6.11	6.20	6.27	6.34	6.40	6.47	.05	10
7.48	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.07	8.15	8.22	.01	
5.71	5.81	5.90	5.99	6.06	6.14	6.20	6.26	6.33	.05	11
7.25	7.36	4.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95	.01	
5.62	5.71	5.80	5.88	5.95	6.03	6.09	6.15	6.21	.05	12
7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73	.01	
5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	6.00	6.05	6.11	.05	13
6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.34	7.42	7.48	7.55	.01	
5.46	5.55	5.64	5.72	5.79	5.85	5.92	5.97	6.03	.05	14
6.77	6.87	6.96	7.05	7.12	7.20	7.27	7.33	7.39	.01	
5.40	5.49	5.58	5.65	5.72	5.79	5.85	5.90	5.96	.05	15
6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26	.01	
5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.72	5.79	5.84	5.90	.05	16
5.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15	.01	
5.31	5.39	5.47	5.55	5.61	5.68	5.74	5.79	5.84	.05	17
6.48	6.57	6.66	6.73	6.80	6.87	6.94	7.00	7.05	.01	
5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79	.05	18
6.41	6.50	6.58	6.65	6.72	6.79	6.85	6.91	6.96	.01	
5.23	5.32	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75	.05	19
6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89	.01	
5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71	.05	20
6.29	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.76	6.82	.01	
5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.50	5.54	5.59	.05	24
6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61	.01	
5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.48	.05	30
5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41	.01	
4.91	4.98	5.05	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36	.05	40
5.77	5.84	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.17	6.21	.01	
4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.16	5.20	5.24	.05	60
5.60	5.67	5.73	5.79	5.84	5.89	5.93	5.98	6.02	.01	
4.72	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.05	5.09	5.13	.05	120
5.44	5.51	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83	.01	
4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01	.05	∞
5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65	.01	

Tabla G Amplitudes studentizadas significativas para 5 y 1 por ciento de la nueva prueba de amplitud múltiple

gl del error	Nivel significativo	p = numero de medias para la amplitud a probarse													
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
1	.05	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
	.01	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	.05	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
	.01	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
3	.05	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
	.01	8.26	8.3	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.0	9.1	9.2	9.3	9.3
4	.05	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
	.01	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.3	7.4	7.4	7.5	7.5
5	.05	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
	.01	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.6	6.6	6.7	6.7	6.8
6	.05	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
	.01	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.1	6.2	6.2	6.3	6.3
7	.05	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
	.01	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	5.8	5.9	5.9	6.0	6.0
8	.05	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
	.01	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	3.40	5.47	5.51	5.5	5.6	5.7	5.7	5.8	5.8
9	.05	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
	.01	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.5	5.5	5.6	5.7	5.7
10	.05	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48
	.01	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.19	5.20	5.24	5.28	5.36	5.42	5.48	5.54	5.55
11	.05	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	4.46	3.46	3.46	3.46	3.47	3.48
	.01	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.24	5.28	5.34	5.38	5.39
12	.05	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.46	3.46	3.46	3.47	3.48
	.01	4.32	4.55	4.68	4.76	4.81	4.92	4.96	5.02	5.07	5.13	5.17	5.22	5.24	5.26
13	.05	3.06	2.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47
	.01	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.04	5.08	5.13	5.14	5.15
14	.05	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47
	.01	4.21	4.42	455	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	4.96	5.00	5.04	5.06	5.07
15	.05	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	4.90	4.94	4.97	4.99	5.00

Tabla H: Tabla de t para comparaciones de dos colas entre p tratamientos y un control para un coeficiente de confianza conjunto de p = 0.95 y p = 0.01

gl del error	p	p = número de medias de tratamiento, sin incluir el control								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	.95	2.57	3.03	3.39	3.66	3.88	4.06	4.22	4.36	4.49
	.99	4.03	4.63	5.09	5.44	5.73	5.97	6.18	6.36	6.53
6	.95	2.45	2.86	3.18	3.41	3.60	3.75	3.88	4.00	4.11
	.99	3.71	4.22	4.60	4.88	5.11	5.30	5.47	5.61	5.74
7	.95	2.36	2.75	3.04	3.24	3.41	3.54	3.66	3.76	3.86
	.99	3.50	3.95	4.28	4.52	4.71	4.87	5.01	5.13	5.24
8	.95	2.31	2.67	2.94	3.13	3.28	3.40	3.51	3.60	3.68
	.99	3.36	3.77	4.06	4.27	4.44	4.58	4.70	4.81	4.90
9	.95	2.26	2.61	2.86	3.04	3.18	3.29	3.39	3.48	3.55
	.99	3.25	3.63	3.90	4.09	4.24	4.37	4.48	4.57	4.65
10	.95	2.23	2.57	2.81	2.97	3.11	3.21	3.31	3.39	3.46
	.99	3.17	3.53	3.78	3.95	4.10	4.21	4.31	4.40	4.47
11	.95	2.20	2.53	2.76	2.92	3.05	3.15	3.24	3.31	3.38
	.99	3.11	3.45	3.68	3.85	3.98	4.09	4.18	4.26	4.33
12	.95	2.18	2.50	2.72	2.88	3.00	3.10	3.18	3.25	3.32
	.99	3.05	3.39	3.61	3.76	3.89	3.99	4.08	4.15	4.22
13	.95	2.16	2.48	2.69	2.84	2.96	3.06	3.14	3.21	3.27
	.99	3.01	3.33	3.54	3.69	3.81	3.91	3.99	4.06	4.13
14	.95	2.14	2.46	2.67	2.81	2.93	3.02	3.10	3.17	3.23
	.99	2.98	3.29	3.49	3.64	3.75	3.84	3.92	3.99	4.05
15	.95	2.13	2.44	2.64	2.79	2.90	2.99	3.07	3.13	3.19
	.99	2.95	3.25	3.45	3.59	3.70	3.79	3.86	3.93	3.99
16	.95	2.12	2.42	2.63	2.77	2.88	2.96	3.04	3.10	3.16
	.99	2.92	3.22	3.41	3.55	3.65	3.74	3.82	3.88	3.93
17	.95	2.11	2.41	2.61	2.75	2.85	2.94	3.01	3.08	3.13
	.99	2.90	3.19	3.38	3.51	3.62	3.70	3.77	3.83	3.89
18	.95	2.10	2.40	2.59	2.73	2.84	2.92	2.99	3.05	3.11
	.99	2.88	3.17	3.35	3.48	3.58	3.67	3.74	3.80	3.85
19	.95	2.09	2.39	2.58	2.72	2.82	2.90	2.97	3.04	3.09
	.99	2.86	3.15	3.33	3.46	3.55	3.64	3.70	3.76	3.81
20	.95	2.09	2.38	2.57	2.70	2.81	2.89	2.96	3.02	3.07
	.99	2.85	3.13	3.31	3.43	3.53	3.61	3.67	3.73	3.78
24	.95	2.06	2.35	2.53	2.66	2.76	2.84	2.91	2.96	3.01
	.99	2.80	3.07	3.24	3.36	3.45	3.52	3.58	3.64	3.69
30	.95	2.04	2.32	2.50	2.62	2.72	2.79	2.86	2.91	2.96
	.99	2.75	3.01	3.17	3.28	3.37	3.44	3.50	3.55	3.59
40	.95	2.02	2.29	2.47	2.58	2.67	2.75	2.81	2.86	2.90
	.99	2.70	2.95	3.10	3.21	3.29	3.36	3.41	3.46	3.50
60	.95	2.00	2.27	2.43	2.55	2.63	2.70	2.76	2.81	2.85
	.99	2.66	2.90	3.04	3.14	3.22	3.28	3.33	3.38	3.42
120	.95	1.98	2.24	2.40	2.51	2.59	2.66	2.71	2.76	2.80
	.99	2.62	2.84	2.98	3.08	3.15	3.21	3.25	3.30	3.33
∞	.95	1.96	2.21	2.37	2.47	2.55	2.62	2.67	2.71	2.75
	.99	2.58	2.79	2.92	3.01	3.08	3.14	3.18	3.22	3.25

Tabla I: Tabla de t para comparaciones de una cola entre p medias de tratamiento y un control para un coeficiente de confianza de $p = 0.95$ y $p = 0.99$

gl del error	*p*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	.95	2.02	2.44	2.68	2.85	2.98	3.08	3.16	3.24	3.30
	.99	3.37	3.90	4.21	4.43	4.60	4.73	4.85	7.94	5.03
6	.95	1.94	2.34	2.56	2.71	2.83	2.92	3.00	3.07	3.12
	.99	3.14	3.61	3.88	4.07	4.21	4.33	4.43	4.51	4.59
7	.95	1.89	2.27	2.48	2.62	2.73	2.82	2.89	2.95	3.01
	.99	3.00	3.42	3.66	3.83	3.96	4.07	4.15	4.23	4.30
8	.95	1.86	2.22	2.42	2.55	2.66	2.74	2.81	2.87	2.92
	.99	2.90	3.29	3.51	3.67	3.79	3.88	3.96	4.03	4.09
9	.95	1.83	2.18	2.37	2.50	2.60	2.68	2.75	2.81	2.86
	.99	2.82	3.19	3.40	3.55	3.66	3.75	3.82	3.89	3.94
10	.95	1.81	2.15	2.34	2.47	2.56	2.64	2.70	2.76	2.81
	.99	2.76	3.11	3.31	3.45	3.56	3.64	3.71	3.78	3.83
11	.95	1.80	2.13	2.31	2.44	2.53	2.60	2.67	2.72	2.77
	.99	2.72	3.06	3.25	3.38	3.48	3.56	3.63	3.69	3.74
12	.95	1.78	2.11	2.29	2.41	2.50	2.58	2.64	2.69	2.74
	.99	2.68	3.01	3.19	3.32	3.42	3.50	3.56	3.62	3.67
13	.95	1.77	2.09	2.27	2.39	2.48	2.55	2.61	2.66	2.71
	.99	2.65	2.97	3.15	3.27	3.37	3.44	3.51	3.56	3.61
14	.95	1.76	2.08	2.25	2.37	2.46	2.53	2.59	2.64	2.69
	.99	2.62	2.98	3.11	3.23	3.32	3.40	3.46	3.51	3.56
15	.95	1.75	2.07	2.24	2.36	2.44	2.51	2.57	2.62	2.67
	.99	2.60	2.91	3.08	3.20	3.29	3.36	3.42	3.47	3.52
16	.95	1.75	2.06	2.23	2.34	2.43	2.50	2.56	2.61	2.65
	.99	2.58	2.88	3.05	3.17	3.26	3.33	3.39	3.44	3.48
17	.95	1.74	2.05	2.22	2.33	2.42	2.49	2.54	2.59	2.64
	.99	2.57	2.36	3.03	3.14	3.23	3.30	3.36	3.41	3.45
18	.95	1.73	2.04	2.21	2.32	2.41	2.48	2.53	2.58	2.62
	.99	2.55	2.84	3.01	3.12	3.21	3.27	3.33	3.38	3.42
19	.95	1.73	2.03	2.20	2.31	2.40	2.47	2.52	2.57	2.61
	.99	2.54	2.83	2.99	3.10	3.18	3.25	3.31	3.36	3.40
20	.95	1.72	2.03	2.19	2.30	2.39	2.46	2.51	2.56	2.60
	.99	2.53	2.81	2.97	3.08	3.17	3.23	3.29	3.34	3.38
24	.95	1.71	2.01	2.17	2.28	2.36	2.43	2.48	2.53	2.57
	.99	2.49	2.77	2.92	3.03	3.11	3.17	3.22	3.27	3.31
30	.95	1.20	1.99	2.15	2.25	2.33	2.40	2.45	2.50	2.54
	.99	2.46	2.72	2.87	2.97	3.05	3.11	3.16	3.21	3.24
40	.95	1.68	1.97	2.13	2.23	2.31	2.37	2.42	2.47	2.51
	.99	2.42	2.68	2.82	2.92	2.99	3.05	3.10	3.14	3.18
60	.95	1.67	1.95	2.10	2.21	2.28	2.35	2.39	2.44	2.48
	.99	2.39	2.64	2.78	2.87	2.94	3.00	3.04	3.08	3.12
120	.95	1.66	1.93	2.08	2.18	2.26	2.32	2.37	2.41	2.45
	.99	2.36	2.60	2.73	2.82	2.89	2.94	2.99	3.03	3.06
∞	.95	1.64	1.92	2.06	2.16	2.23	2.29	2.34	2.38	2.42
	.99	2.33	2.56	2.68	2.77	2.84	2.89	2.93	2.97	3.00

Este libro se imprimió
durante el año 2000
en los Talleres Gráficos
de FEPUVA - UCV
Caracas - Venezuela

ACERCA DEL AUTOR

El Doctor y Profesor Titular Franklin Chacín Lugo, graduado de Ingeniero Agrónomo, es un destacado investigador en el área de los Métodos Estadísticos aplicados a la Agronomía y en general a la Biología. Inició su preparación siendo estudiante universitario y en proceso de superación continua en esta disciplina, ha transcurrido su vida profesional como Profesor de Postgrado de Estadística, Coordinador General de Investigación y Decano de Facultad de Agronomía de la Universidad Central de Venezuela. Cuenta con Trabajos de Investigación como autor y como coautor en la formación de alumnos de Pregrado y Postgrado.

En 1998 publica el texto Análisis de Regresión y Superficie de Respuesta, producto de su amplia experiencia como docente investigador y asesor; y basado en su Trabajo de Ascenso a Titular, titulado "Análisis de Regresión y Superficie de Respuesta".

Esta nueva obra "Diseño y Análisis de Experimentos" es un aporte que contribuye a la mejor formación de nuestros docentes e investigadores, de estudiantes y de profesionales vinculados a la aplicación de los Estudios Estadísticos.